прежнему будем обозначать через $g_w$. Итак,

$$\|g_w\| = \sup_{\|b\|_{-s} \leqslant 1} |g_w(b)| = \|w\|_s. \tag{13}$$

Следовательно, принимая во внимание полноту пространства $H_0^s(\Omega)$, мы можем рассматривать совокупность $G$ всех непрерывных линейных функционалов $g_w$ на $H_0^{-s}(\Omega)$ как замкнутое линейное подпространство из $H_0^{-s}(\Omega)'$, имея в виду соответствие $g_w \longleftrightarrow w$. Если это замкнутое подпространство $G$ не является плотным в $H_0^{-s}(\Omega)'$, то найдется непрерывный линейный функционал $f \neq 0$ на $H_0^{-s}(\Omega)'$, такой, что $f(g_w) = 0$ для всех $g_w \in G$. Но так как гильбертово пространство $H_0^{-s}(\Omega)$ рефлексивно, такой функционал $f$ определяется соотношением $f(g_w) = g_w(f_0)$, $f_0 \in H_0^{-s}(\Omega)$, и поэтому элемент $f_0$, согласно (3′), должен быть равен нулю. Последнее противоречит тому, что $f \neq 0$. Тем самым доказано, что $H_0^{-s}(\Omega)' = H_0^s(\Omega)$.

**Замечание.** П. Лакс ввел понятие отрицательной нормы, имея в виду использовать его при исследовании вопроса о существовании производных (в обычном смысле) у обобщенных решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Проблемы, связанные с дифференцируемостью обобщенных решений, мы рассмотрим в дальнейших главах. Следует заметить, что понятие отрицательной нормы можно также естественным образом ввести с помощью преобразования Фурье. Это было сделано Лере [1] раньше, чем П. Лаксом. Более подробно мы коснемся этих вопросов в главе, посвященной преобразованию Фурье.

## *11. Локальная структура обобщенных функций*

Всякая обобщенная функция локально совпадает с обобщенной производной некоторой функции. Точнее справедлива следующая

**Теорема** (Л. Шварц [1]). Пусть в некоторой области $\Omega \subseteq R^n$ задана обобщенная функция $T$. Тогда для любого бикомпактного подмножества $K \subset \Omega$ существуют положительное целое число $m_0 = m_0(T, K)$ и функция $f(x) = f(x;\, T,\, K,\, m_0) \in L^2(K)$, такие, что

$$T(\varphi) = \int_K f(x) \frac{\partial^{nm_0}\varphi(x)}{\partial x_1^{m_0} \partial x_2^{m_0} \ldots \partial x_n^{m_0}} dx \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathfrak{D}_K(\Omega). \tag{1}$$

**Доказательство.** Согласно следствию § 8 гл. I, существуют положительная постоянная $C$ и положительное целое $m$, такие, что

$$|T(\varphi)| \leqslant C \sup_{|j| \leqslant m,\ x \in K} |D^j \varphi(x)| \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathfrak{D}_K(\Omega). \tag{2}$$

Поэтому найдется такое положительное $\delta$, что

$$\text{из неравенства } p_m(\varphi) \equiv \sup_{|j| \leqslant m,\ x \in K} |D^j \varphi(x)| \leqslant \delta, \quad \varphi \in \mathfrak{D}_K(\Omega),$$

$$\text{следует неравенство } |T(\varphi)| \leqslant 1. \tag{3}$$

Введем обозначение

$$\frac{\partial^s}{\partial x^s} = \frac{\partial^{sn}}{\partial x_1^s\, \partial x_2^s \ldots \partial x_n^s} \tag{4}$$

и покажем, что существует положительная постоянная $\varepsilon$, такая, что при $m_0 = m + 1$

$$\text{из неравенства } \int_\Omega \left| \frac{\partial^{m_0} \varphi(x)}{\partial x^{m_0}} \right|^2 dx \leqslant \varepsilon, \quad \varphi \in \mathfrak{D}_K(\Omega),$$

$$\text{следует неравенство } p_m(\varphi) \leqslant \delta. \tag{5}$$

Это можно доказать при помощи повторного применения неравенства

$$|\psi(x)| \leqslant \int_{K \cap (-\infty,\, x_i)} |\partial \psi(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)/\partial y|\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \left( \int_{K \cap (-\infty,\, x_i)} dy \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left( \int_{K \cap (-\infty,\, x_i)} |\partial \psi(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)/\partial y|^2\, dy \right)^{1/2} =$$

$$= t^{1/2} \left( \int_{K \cap (-\infty,\, x_i)} |\partial \psi(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)/\partial y|^2\, dy \right)^{1/2},$$

где $t$ — *диаметр* множества $K$, т. е. максимальное расстояние между двумя точками бикомпактного множества $K$.

Рассмотрим отображение $\varphi(x) \to \psi(x) = \partial^{m_0} \varphi(x)/\partial x^{m_0}$ пространства $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ в себя. С помощью интегрирования легко убедиться в том, что если $\psi(x) = 0$, то $\varphi(x) = 0$. Таким образом, это отображение взаимно однозначно. Поэтому функционал $T(\varphi)$ $(\varphi \in \mathfrak{D}_K(\Omega))$ определяет линейный функционал $S(\psi) = T(\varphi)$, где $\psi(x) = \partial^{m_0} \varphi(x)/\partial x^{m_0}$. Из (3) и (5) видно, что $S$ — непрерывный линейный функционал на предгильбертовом пространстве $X$, состоящем из функций $\psi$ указанного вида, с нормой $\|\psi\| = \left( \int_K |\psi(x)|^2\, dx \right)^{1/2}$. Следовательно, по теореме Рисса о представлении линейного функционала в пополнении пространства $X$ существует единственным образом определенная функция $f(x)$, такая, что

$$T(\varphi)=S(\psi)=\int\limits_K \left(\frac{\partial^{m_0}\varphi(x)}{\partial x^{m_0}}\right)\cdot f(x)\,dx \quad \text{для всех} \quad \varphi\in\mathfrak{D}_K(\Omega).$$

Поскольку пополнение пространства $X$ содержится в $L^2(K)$ как замкнутое линейное подпространство, теорема тем самым доказана.

## Литература к главе III

Общее изложение теории гильбертовых пространств можно найти в книгах: Ахиезер — Глазман [1], Данфорд — Шварц [2], Надь [1], Рисс — Надь [3], Стоун [1].