ГЛАВА IV

Теоремы Хана — Банаха

В гильбертовом пространстве естественным образом вводится понятие ортогональных координат относительно ортогонального базиса — за эти координаты принимаются значения ограниченных линейных функционалов, определяемых векторами базиса. Это наводит на мысль рассматривать непрерывные линейные функционалы в линейном топологическом пространстве как обобщенные координаты. Вопрос о существовании нетривиальных непрерывных линейных функционалов в общем локально выпуклом линейном топологическом пространстве решается с помощью теорем Хана — Банаха о продолжении функционала.

1. Теорема Хана — Банаха о продолжении линейных функционалов в вещественных линейных пространствах

Теорема (Хан [2], Банах [1]). Пусть X — вещественное линейное пространство и $p(x)$ — вещественная функция, заданная на X и удовлетворяющая следующим условиям:

$$p(x+y) \leqslant p(x)+p(y) \quad \text{(полуаддитивность)}, \tag{1}$$

$$p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad \text{для} \quad \alpha \geqslant 0. \tag{2}$$

Пусть M — вещественное линейное подпространство в X и f_0 — вещественный линейный функционал, заданный на M:

$$f_0(\alpha x+\beta y) = \alpha f_0(x)+\beta f_0(y) \text{ для } x, y \in M \text{ и вещественных } \alpha, \beta. \tag{3}$$

Пусть f_0 удовлетворяет неравенству $f_0(x) \leqslant p(x)$ на M. Тогда существует вещественный линейный функционал F, определенный на X, такой, что 1) F служит продолжением f_0, т. е. $F(x) = f_0(x)$ для всех $x \in M$; 2) $F(x) \leqslant p(x)$ на X.

Доказательство. Предположим сначала, что пространство X натянуто на M и некоторый элемент $x_0 \notin M$, т. е.

$$X = \{x = m + \alpha x_0;\ m \in M,\ \alpha \text{ — вещественные числа}\}.$$

Так как $x_0 \notin M$, представление элементов $x \in X$ в виде $x = m + \alpha x_0$ определяется однозначно. Следовательно, полагая

$$F(x) = F(m+\alpha x_0) \equiv f_0(m) + \alpha c,$$

где c — произвольное вещественное число, мы получим вещественный линейный функционал F на X, являющийся продолжением f_0. Мы должны теперь выбрать c таким, что $F(x) \leqslant p(x)$, т. е. $f_0(m) + \alpha c \leqslant p(m + \alpha x_0)$. Последнее неравенство эквивалентно следующим двум условиям:

$$f_0\left(\frac{m}{\alpha}\right) + c \leqslant p\left(x_0 + \frac{m}{\alpha}\right) \quad \text{для} \quad \alpha > 0,$$

$$f_0\left(\frac{m}{-\alpha}\right) - c \leqslant p\left(-x_0 + \frac{m}{-\alpha}\right) \quad \text{для} \quad \alpha < 0.$$

Чтобы выполнялись эти условия, мы выберем c так, что

$$f_0(m') - p(m' - x_0) \leqslant c \leqslant p(m'' + x_0) - f_0(m'')$$

для всех m', $m'' \in M$. Такой выбор возможен, поскольку

$$f_0(m') + f_0(m'') = f_0(m' + m'') \leqslant p(m' + m'') =$$
$$= p(m' - x_0 + m'' + x_0) \leqslant p(m' - x_0) + p(m'' + x_0).$$

Итак, остается лишь выбрать c между двумя числами

$$\sup_{m' \in M} [f_0(m') - p(m' - x_0)] \quad \text{и} \quad \inf_{m'' \in M} [p(m'' + x_0) - f_0(m'')].$$

Рассмотрим теперь семейство всех вещественных линейных продолжений g функционала f_0, для которых при всех x из области определения g выполняется неравенство $g(x) \leqslant p(x)$. Мы можем частично упорядочить это семейство, полагая $h \succ g$, если функционал h служит продолжением g. Тогда по лемме Цорна существует максимальное линейное продолжение g функционала f_0, для которого неравенство $g(x) \leqslant p(x)$ выполняется при всех x из области определения g. Остается показать, что область определения $D(g)$ функционала g совпадает с пространством X. Если бы это было не так, мы могли бы, приняв $D(g)$ за подпространство M, а сам функционал g за f_0, построить продолжение F функционала g, удовлетворяющее неравенству $F(x) \leqslant p(x)$ для всех x из области определения F. Но это противоречит максимальности линейного продолжения g.

Следствие. Если на вещественном линейном пространстве X задана функция $p(x)$, удовлетворяющая условиям (1) и (2), то существует определенный на X линейный функционал f, такой, что

$$-p(-x) \leqslant f(x) \leqslant p(x). \tag{4}$$

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x_0 \in X$ и определим множество $M = \{x;\ x = \alpha x_0,\ \alpha \text{ — любые вещественные числа}\}$. Положим $f_0(\alpha x_0) = \alpha p(x_0)$. Тогда f_0 представляет собой вещественный линейный функционал с областью определения M. На множестве M неравенство $f_0(x) \leqslant p(x)$ выполняется. В самом деле, если $\alpha > 0$, то $\alpha p(x_0) = p(\alpha x_0)$, а если $\alpha < 0$, то

$\alpha p(x_0) \leqslant -\alpha p(-x_0) = p(\alpha x_0)$, поскольку $0 = p(0) \leqslant p(x_0) + p(-x_0)$. Значит, существует линейный функционал f, определенный на пространстве X, такой, что $f(x) = f_0(x)$ на M и $f(x) \leqslant p(x)$ на X. Поскольку $-f(x) = f(-x) \leqslant p(-x)$, мы получаем $-p(-x) \leqslant f(x) \leqslant p(x)$.

2. Обобщенный предел

Понятие последовательности $\{x_n\}$ счетного числа элементов x_n можно обобщить, вводя понятие *обобщенной последовательности элементов*, соответствующих *направленному множеству* индексов, которое может быть и несчетным. При этом возникает понятие *предела обобщенной последовательности*, или *обобщенного предела по направленному множеству*, обобщающее понятие предела последовательности.

Определение. Частично упорядоченное множество A элементов $\alpha, \beta, \ldots$ называется *направленным множеством*, если оно удовлетворяет следующему условию

$$\text{для всякой пары } \alpha, \beta \text{ элементов множества } A \text{ существует такой элемент } \gamma \in A, \text{ что } \alpha \prec \gamma,\ \beta \prec \gamma. \tag{1}$$

Допустим, что каждой точке α направленного множества A поставлено в соответствие некоторое множество $f(\alpha)$ вещественных чисел; $f(\alpha)$, таким образом, представляет собой вещественную функцию, не обязательно однозначную, заданную на направленном множестве A. Такая функция $f(\alpha)$ называется *обобщенной последовательностью.*

Если для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $\alpha_0 \in A$, такой, что из соотношения $\alpha_0 \prec \alpha$ вытекает неравенство $|f(\alpha) - a| \leqslant \varepsilon$, где a — некоторое вещественное число, причем это неравенство справедливо для всех значений f в точке α, то a называется *пределом обобщенной последовательности* $f(\alpha)$, или *обобщенным пределом* $f(\alpha)$ *по направленному множеству* A. Для обозначения этого предела мы будем применять запись

$$\lim_{\alpha \in A} f(\alpha) = a.$$

Пример. Рассмотрим некоторое *разбиение* Δ отрезка $[0, 1]$:

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1.$$

Совокупность P всех разбиений вида Δ отрезка $[0, 1]$ становится направленным множеством, если ввести отношение частичного упорядочения следующим образом: пусть разбиение Δ' имеет вид $0 = t'_0 < t'_1 < \ldots < t'_m = 1$; тогда запись $\Delta \prec \Delta'$ означает, что $n \leqslant m$ и что каждое из чисел t_i равно некоторому из t'_j. Пусть