$\alpha p(x_0) \leqslant -\alpha p(-x_0) = p(\alpha x_0)$, поскольку $0 = p(0) \leqslant p(x_0) + p(-x_0)$. Значит, существует линейный функционал f, определенный на пространстве X, такой, что $f(x) = f_0(x)$ на M и $f(x) \leqslant p(x)$ на X. Поскольку $-f(x) = f(-x) \leqslant p(-x)$, мы получаем $-p(-x) \leqslant f(x) \leqslant p(x)$.

2. Обобщенный предел

Понятие последовательности $\{x_n\}$ счетного числа элементов x_n можно обобщить, вводя понятие *обобщенной последовательности элементов*, соответствующих *направленному множеству* индексов, которое может быть и несчетным. При этом возникает понятие *предела обобщенной последовательности*, или *обобщенного предела по направленному множеству*, обобщающее понятие предела последовательности.

Определение. Частично упорядоченное множество A элементов $\alpha, \beta, \ldots$ называется *направленным множеством*, если оно удовлетворяет следующему условию

$$\text{для всякой пары } \alpha, \beta \text{ элементов множества } A \text{ существует такой элемент } \gamma \in A, \text{ что } \alpha \prec \gamma,\ \beta \prec \gamma. \tag{1}$$

Допустим, что каждой точке α направленного множества A поставлено в соответствие некоторое множество $f(\alpha)$ вещественных чисел; $f(\alpha)$, таким образом, представляет собой вещественную функцию, не обязательно однозначную, заданную на направленном множестве A. Такая функция $f(\alpha)$ называется *обобщенной последовательностью.*

Если для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $\alpha_0 \in A$, такой, что из соотношения $\alpha_0 \prec \alpha$ вытекает неравенство $|f(\alpha) - a| \leqslant \varepsilon$, где a — некоторое вещественное число, причем это неравенство справедливо для всех значений f в точке α, то a называется *пределом обобщенной последовательности* $f(\alpha)$, или *обобщенным пределом* $f(\alpha)$ *по направленному множеству* A. Для обозначения этого предела мы будем применять запись

$$\lim_{\alpha \in A} f(\alpha) = a.$$

Пример. Рассмотрим некоторое *разбиение* Δ отрезка $[0, 1]$:

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1.$$

Совокупность P всех разбиений вида Δ отрезка $[0, 1]$ становится направленным множеством, если ввести отношение частичного упорядочения следующим образом: пусть разбиение Δ' имеет вид $0 = t'_0 < t'_1 < \ldots < t'_m = 1$; тогда запись $\Delta \prec \Delta'$ означает, что $n \leqslant m$ и что каждое из чисел t_i равно некоторому из t'_j. Пусть

$x(t)$ — вещественная непрерывная функция, заданная на $[0, 1]$. За $f(\Delta)$ примем множество вещественных чисел вида

$$\sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j)\, x(t'_j),$$

где t'_j — произвольная точка отрезка $[t_j, t_{j+1}]$.

Таким образом, $f(\Delta)$ — это множество всех *интегральных сумм Римана* для функции $x(t)$, относящихся к разбиению Δ. Интеграл Римана $\int\limits_0^1 x(t)\,dt$ представляет собой не что иное, как обобщенный предел $f(\Delta)$ по направленному множеству P.

Следующая теорема связана с существованием предела обобщенной последовательности.

Теорема (Банах). Пусть $x(\alpha)$ — вещественная ограниченная функция, определенная на направленном множестве A. Совокупность всех таких функций с операциями

$$(x+y)(\alpha) = x(\alpha) + y(\alpha), \qquad (\beta x)(\alpha) = \beta x(\alpha)$$

образует вещественное линейное пространство, которое мы обозначим через X. На пространстве X можно определить линейный функционал (обозначим его $\underset{\alpha \in A}{\mathrm{LIM}}\, x(\alpha)$), удовлетворяющий неравенствам

$$\varliminf_{\alpha \in A} x(\alpha) \leqslant \underset{\alpha \in A}{\mathrm{LIM}}\, x(\alpha) \leqslant \varlimsup_{\alpha \in A} x(\alpha),$$

где

$$\varliminf_{\alpha \in A} x(\alpha) \equiv \sup_{\alpha} \inf_{\alpha \succ \beta} x(\beta), \qquad \varlimsup_{\alpha \in A} x(\beta) \equiv \inf_{\alpha} \sup_{\alpha \succ \beta} x(\beta)$$

Если обобщенный предел $\lim\limits_{\alpha \in A} x(\alpha)$ существует, то

$$\underset{\alpha \in A}{\mathrm{LIM}}\, x(\alpha) = \lim_{\alpha \in A} x(\alpha).$$

Доказательство. Положим $p(x) = \varlimsup\limits_{\alpha \in A} x(\alpha)$. Как нетрудно проверить, функция $p(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Хана — Банаха. Следовательно, существует определенный на X линейный функционал f, такой, что $-p(-x) \leqslant f(x) \leqslant p(x)$ при $x \in X$. Нетрудно убедиться в том, что $\varliminf\limits_{\alpha \in A} x(\alpha) = -p(-x)$, поэтому, полагая $\underset{\alpha \in A}{\mathrm{LIM}}\, x(\alpha) = f(x)$, мы завершаем доказательство теоремы.