3. Полные локально выпуклые линейные топологические пространства

Определение. По аналогии с числовыми обобщенными последовательностями можно определить обобщенные последовательности $\{x_\alpha\}$ элементов линейного топологического пространства X. Говорят, что обобщенная последовательность $\{x_\alpha\}$ *сходится к элементу* x пространства X, если для всякой окрестности $U(x)$ элемента x существует такой индекс α_0, что $x_\alpha \in U(x)$ для всех индексов $\alpha \succ \alpha_0$. Обобщенная последовательность $\{x_\alpha\}$ называется *фундаментальной*, если каждой окрестности $U(0)$ нулевого вектора пространства X можно сопоставить такой индекс α_0, что $(x_\alpha - x_\beta) \in U(0)$ для всех индексов α, $\beta \succ \alpha_0$. Линейное топологическое пространство X называется *полным*, если всякая фундаментальная обобщенная последовательность, принадлежащая X, сходится к некоторому элементу $x \in X$ в смысле приведенного выше определения.

Замечание. Можно ослабить условие полноты и потребовать только, чтобы каждая обычная последовательность из X, фундаментальная как обобщенная последовательность, сходилась к некоторому элементу $x \in X$. В этом случае пространство называется *секвенциально полным*. Для нормированных линейных пространств эти определения полноты эквивалентны. В общем случае, однако, не всякое секвенциально полное пространство является полным.

Пример локально выпуклого секвенциально полного линейного топологического пространства. Допустим, что некоторая последовательность $\{f_h(x)\}$ функций пространства $\mathfrak{D}(\Omega)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{h,\,k\to\infty}(f_h - f_k) = 0$. Согласно следствию из предложения 7, гл. I, § 1, мы тем самым предполагаем, что в области Ω существует бикомпактное подмножество K, такое, что $\operatorname{supp}(f_h) \subseteq K$ $(h = 1, 2, \ldots)$ и $\lim\limits_{h,\,k\to\infty}(D^s f_h(x) - D^s f_k(x)) = 0$ равномерно на K для любого дифференциального оператора D^s. Тогда, применяя теорему Асколи — Арцела, легко доказать существование такой функции $f \in \mathfrak{D}(\Omega)$, что $\lim\limits_{h\to\infty} D^s f_h(x) = D^s f(x)$ равномерно на множестве K для всякого дифференциального оператора D^s. Таким образом, в $\mathfrak{D}(\Omega)$ существует предел $\lim\limits_{h\to\infty} f_h = f$, и, следовательно, пространство $\mathfrak{D}(\Omega)$ секвенциально полно. Точно так же можно доказать, что и пространство $\mathfrak{E}(\Omega)$ секвенциально полно.

Как и в случае нормированного линейного пространства, справедлива следующая

Теорема. Всякое локально выпуклое линейное топологическое пространство X может быть вложено в некоторое локально выпуклое полное линейное топологическое пространство, в котором X образует плотное подмножество.

Доказательства этой теоремы мы не приводим. Литература по этому вопросу указана в книге Дьедонне [1]. См. также Кёте [1].

4. Теорема Хана — Банаха о продолжении линейных функционалов в комплексных линейных пространствах

Теорема (Боненблюст — Собчик). Пусть X — комплексное линейное пространство и $p(x)$ — некоторая определенная на X полунорма. Пусть M — комплексное линейное подпространство в X и f — заданный на M комплексный линейный функционал, такой, что $|f(x)| \leqslant p(x)$ на M. Тогда существует определенный на всем пространстве X комплексный линейный функционал F, такой, что (1) F служит продолжением f; (2) $|F(x)| \leqslant p(x)$ на X.

Доказательство. Заметим, что если в комплексном линейном пространстве ограничиться умножением векторов лишь на вещественные числа, то это пространство можно рассматривать как вещественное. Если $f(x) = g(x) + ih(x)$, где $g(x)$ и $h(x)$ — соответственно вещественная и мнимая части $f(x)$, то g и h — вещественные линейные функционалы, определенные на M. При этом

$$|g(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant p(x) \quad \text{и} \quad |h(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant p(x) \quad \text{при} \quad x \in M.$$

Так как для каждого $x \in M$

$$g(ix) + ih(ix) = f(ix) = if(x) = i(g(x) + ih(x)) = -h(x) + ig(x),$$

то

$$h(x) = -g(ix) \quad \text{для всех} \quad x \in M.$$

По теореме, доказанной в § 1 этой главы, мы можем продолжить g до вещественного линейного функционала G, определенного во всем пространстве X и удовлетворяющего условию $G(x) \leqslant p(x)$ при $x \in X$. Следовательно, $-G(x) = G(-x) \leqslant p(-x) = p(x)$, и поэтому $|G(x)| \leqslant p(x)$. Определим теперь функционал

$$F(x) = G(x) - iG(ix).$$

Легко видеть, что F — комплексный линейный функционал, определенный на X, так как $F(ix) = G(ix) - iG(-x) = G(ix) + iG(x) = iF(x)$. Функционал F служит продолжением f, поскольку при $x \in M$

$$F(x) = G(x) - iG(ix) = g(x) - ig(ix) = g(x) + ih(x) = f(x).$$

Чтобы доказать неравенство $|F(x)| \leqslant p(x)$, запишем $F(x)$ в виде $F(x) = re^{-i\theta}$. Тогда $|F(x)| = e^{i\theta}F(x) = F(e^{i\theta}x)$, и выражение $F(e^{i\theta}x)$ оказывается вещественным и неотрицательным. Поэтому $|F(x)| = |G(e^{i\theta}x)| \leqslant p(e^{i\theta}x) = |e^{i\theta}|\,p(x) = p(x)$.