5. Теорема Хана — Банаха о продолжении линейных функционалов в нормированных линейных пространствах

Теорема 1. Пусть X — нормированное линейное пространство, M — его линейное подпространство, а f_1 — непрерывный линейный функционал, заданный на M. Тогда существует определенный на всем пространстве X непрерывный линейный функционал f, такой, что 1) f служит продолжением f_1; 2) $\|f_1\| = \|f\|$.

Доказательство. Положим $p(x) = \|f_1\| \cdot \|x\|$. Тогда $p(x)$ — непрерывная полунорма, определенная на всем пространстве X, причем $|f_1(x)| \leqslant p(x)$ на M. По теореме предыдущего параграфа существует определенный на всем пространстве X линейный функционал f, служащий продолжением f_1 и удовлетворяющий условию $|f(x)| \leqslant p(x)$. Таким образом, $\|f\| \leqslant \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} p(x) = \|f_1\|$. С другой стороны, поскольку f — продолжение f_1, справедливо неравенство $\|f\| \geqslant \|f_1\|$. В результате мы получаем $\|f_1\| = \|f\|$.

Приложение к проблеме моментов

Теорема 2. Пусть X — нормированное линейное пространство. Допустим, что заданы последовательность элементов $\{x_n\} \in X$, последовательность комплексных чисел $\{\alpha_n\}$ и положительное число γ. Тогда для того чтобы существовал определенный во всем пространстве X непрерывный линейный функционал f, такой, что $f(x_i) = \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и $\|f\| \leqslant \gamma$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого положительного целого n и любых комплексных $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ удовлетворялось неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i \right| \leqslant \gamma \left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i \right\|.$$

Доказательство. Необходимость этого условия следует из определения нормы $\|f\|$. Докажем его достаточность. Рассмотрим множество

$$X_1 = \left\{ z;\ z = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i, \text{ где } n \text{ и } \beta_i \text{ произвольны} \right\}.$$

Если имеются два представления вида

$$z = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i = \sum_{i'=1}^{m} \beta_{i'} x_{i'},$$

одного и того же элемента $z \in X_1$, то по условию теоремы

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i - \sum_{i'=1}^{m} \beta_{i'} \alpha_{i'} \right| \leqslant \gamma \left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i - \sum_{i'=1}^{m} \beta_{i'} x_{i'} \right\| = 0.$$

Поэтому формула $f_1\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\alpha_i$ определяет на множестве X_1 непрерывный линейный функционал f_1. Для завершения доказательства остается лишь, используя теорему 1, продолжить f_1 до непрерывного линейного функционала f на X, такого, что $\|f\|=\|f_1\|$.

Замечание. В § 9 будет показано, что всякий непрерывный линейный функционал f на пространстве $C[0, 1]$ может быть представлен в виде

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\,m(dt),$$

где m — единственным образом определенная мера Бэра на интервале $[0, 1]$. Поэтому если мы возьмем $x_j(t)=t^{j-1}$ $(j=1, 2, \ldots)$, то теорема 2 даст условие разрешимости так называемой *проблемы моментов*

$$\int_0^1 t^{j-1}m(dt)=\alpha_j \quad (j=1, 2, \ldots).$$

6. Существование нетривиальных непрерывных линейных функционалов

Теорема 1. Пусть X — вещественное или комплексное линейное топологическое пространство, x_0 — его произвольная точка и $p(x)$ — непрерывная полунорма на X. Тогда существует определенный на X непрерывный линейный функционал F, такой, что $F(x_0)=p(x_0)$ и $|F(x)|\leqslant p(x)$ для всех $x\in X$.

Доказательство. Обозначим через M множество всех элементов вида αx_0 и определим функционал f на M формулой $f(\alpha x_0)=\alpha p(x_0)$. Тогда f — линейный функционал на M, причем выполняется условие $|f(\alpha x_0)|=|\alpha p(x_0)|=p(\alpha x_0)$. Согласно теореме из § 4, существует продолжение F функционала f, такое, что $|F(x)|\leqslant p(x)$ при всех $x\in X$. Следовательно, функционал $F(x)$ непрерывен в точке $x=0$ вместе с полунормой $p(x)$, и, следовательно, как линейный функционал он непрерывен во всех точках пространства X.

Следствие 1. Пусть X — локально выпуклое пространство, а $x_0\neq 0$ — некоторый его элемент. Тогда существует непрерывная полунорма $p(x)$ на X, такая, что $p(x_0)\neq 0$. Поэтому, согласно теореме 1, существует непрерывный линейный функционал f_0 на X, такой, что

$$f_0(x_0)=p(x_0)\neq 0 \quad \text{и} \quad |f_0(x)|\leqslant p(x) \quad \text{при} \quad x\in X.$$