Поэтому формула $f_1\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\alpha_i$ определяет на множестве X_1 непрерывный линейный функционал f_1. Для завершения доказательства остается лишь, используя теорему 1, продолжить f_1 до непрерывного линейного функционала f на X, такого, что $\|f\|=\|f_1\|$.

Замечание. В § 9 будет показано, что всякий непрерывный линейный функционал f на пространстве $C[0, 1]$ может быть представлен в виде

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\,m(dt),$$

где m — единственным образом определенная мера Бэра на интервале $[0, 1]$. Поэтому если мы возьмем $x_j(t)=t^{j-1}$ $(j=1, 2, \ldots)$, то теорема 2 даст условие разрешимости так называемой *проблемы моментов*

$$\int_0^1 t^{j-1}m(dt)=\alpha_j \quad (j=1, 2, \ldots).$$

6. Существование нетривиальных непрерывных линейных функционалов

Теорема 1. Пусть X — вещественное или комплексное линейное топологическое пространство, x_0 — его произвольная точка и $p(x)$ — непрерывная полунорма на X. Тогда существует определенный на X непрерывный линейный функционал F, такой, что $F(x_0)=p(x_0)$ и $|F(x)|\leqslant p(x)$ для всех $x\in X$.

Доказательство. Обозначим через M множество всех элементов вида αx_0 и определим функционал f на M формулой $f(\alpha x_0)=\alpha p(x_0)$. Тогда f — линейный функционал на M, причем выполняется условие $|f(\alpha x_0)|=|\alpha p(x_0)|=p(\alpha x_0)$. Согласно теореме из § 4, существует продолжение F функционала f, такое, что $|F(x)|\leqslant p(x)$ при всех $x\in X$. Следовательно, функционал $F(x)$ непрерывен в точке $x=0$ вместе с полунормой $p(x)$, и, следовательно, как линейный функционал он непрерывен во всех точках пространства X.

Следствие 1. Пусть X — локально выпуклое пространство, а $x_0\neq 0$ — некоторый его элемент. Тогда существует непрерывная полунорма $p(x)$ на X, такая, что $p(x_0)\neq 0$. Поэтому, согласно теореме 1, существует непрерывный линейный функционал f_0 на X, такой, что

$$f_0(x_0)=p(x_0)\neq 0 \quad \text{и} \quad |f_0(x)|\leqslant p(x) \quad \text{при} \quad x\in X.$$

Следствие 2. Пусть X — нормированное линейное пространство, а $x_0 \neq 0$ — некоторый его элемент. Тогда существует непрерывный линейный функционал f_0 на X, такой, что

$$f_0(x_0) = \|x_0\| \quad \text{и} \quad \|f_0\| = 1.$$

Доказательство. Примем за $p(x)$ норму $\|x\|$ и применим следствие 1. Тогда $\|f_0\| \leqslant 1$, так как $|f_0(x)| \leqslant \|x\|$. Но, с другой стороны, $f_0(x_0) = \|x_0\|$, и поэтому $\|f_0\| = 1$.

Замечание. Следующая теорема доказывается так же, как предыдущая, с использованием теоремы из § 1.

Теорема 1′. Пусть X — вещественное линейное топологическое пространство, x_0 — некоторая его точка, а $p(x)$ — вещественный непрерывный функционал на X, такой, что

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \quad \text{и} \quad p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad \text{для} \quad \alpha \geqslant 0.$$

Тогда существует непрерывный вещественный линейный функционал F на X, такой, что $F(x_0) = p(x_0)$ и $-p(-x) \leqslant F(x) \leqslant p(x)$ при $x \in X$.

Теорема 2. Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство. Пусть M — линейное подпространство в X, а f — непрерывный линейный функционал на M. Тогда существует непрерывный линейный функционал F на X, представляющий собой продолжение f.

Доказательство. Так как функционал f непрерывен на множестве M и пространство X — локально выпуклое, существует открытая выпуклая уравновешенная окрестность U точки $x = 0$ пространства X, такая, что $|f(x)| \leqslant 1$ при всех $x \in M \cap U$. Обозначим через p функционал Минковского множества U. Тогда p представляет собой непрерывную полунорму пространства X и $U = \{x;\ p(x) < 1\}$. Для каждой точки $x \in M$ выберем число $\alpha > 0$ таким, что $\alpha > p(x)$. Тогда $p(x/\alpha) < 1$, и поэтому $|f(x/\alpha)| \leqslant 1$, т. е. $|f(x)| \leqslant \alpha$. Переходя к пределу при $\alpha \downarrow p(x)$, мы видим, что $|f(x)| \leqslant p(x)$ при $x \in M$. Поэтому, согласно теореме из § 4, существует определенный на всем пространстве X непрерывный линейный функционал F, служащий продолжением f, причем $|F(x)| \leqslant p(x)$ для всех $x \in X$.

Теорема 3 (Мазур). Пусть X — вещественное или комплексное локально выпуклое линейное топологическое пространство и M — некоторое его замкнутое выпуклое уравновешенное подмножество. Тогда для любой точки $x_0 \notin M$ существует непрерывный линейный функционал f_0 на X, такой, что $f_0(x_0) > 1$ и $|f_0(x)| \leqslant 1$ на M.

Доказательство. Ввиду того что подмножество M замкнуто, существует выпуклая уравновешенная окрестность V точки $x = 0$, такая, что $M \cap (x_0 + V) = \emptyset$. Из того, что окрестность V уравновешенная и выпуклая, вытекает, что $\left(M + \frac{V}{2}\right) \cap \left(x_0 + \frac{V}{2}\right) = \emptyset$. Так как множество $\left(x_0+\frac{V}{2}\right)$ является окрестностью точки x_0, замыкание U множества $\left(M+\frac{V}{2}\right)$ не содержит x_0. Поскольку $M\ni 0$, замкнутое выпуклое уравновешенное множество U представляет собой окрестность нуля, так как U содержит как подмножество множество $V/2$. Пусть p — функционал Минковского для U. Множество U замкнуто, поэтому для любой точки $x_0 \notin U$ выполняется неравенство $p(x_0)>1$; кроме того, $p(x)\leqslant 1$, если $x\in U$.

Отсюда на основании следствия 1 теоремы 1 мы заключаем, что существует непрерывный линейный функционал f_0, заданный во всем пространстве X, такой, что $f_0(x_0)=p(x_0)>1$ и $|f_0(x)|\leqslant p(x)$ для всех $x\in X$. Поэтому, в частности, $|f_0(x)|\leqslant 1$ на M.

Следствие. Пусть M — замкнутое линейное подпространство локально выпуклого линейного топологического пространства X. Тогда для любой точки $x_0\in X-M$ существует заданный на всем пространстве X непрерывный линейный функционал f_0, такой, что $f_0(x_0)>1$ и $f_0(x)=0$ на M. Кроме того, если X — нормированное линейное пространство и $\operatorname{dis}(x_0, M)>d>0$, то можно выбрать функционал f_0 так, что $\|f_0\|\leqslant 1/d$.

Доказательство. Первая часть утверждения вытекает из линейности подпространства M. Для доказательства заключительной части следует положить $U=\{x;\ \operatorname{dis}(x, M)\leqslant d\}$ в доказательстве теоремы 3.

Замечание. Следующая теорема доказывается так же, как предыдущая, с использованием теоремы 1′.

Теорема 3′ (Мазур). Пусть X — локально выпуклое вещественное линейное топологическое пространство и M — его замкнутое выпуклое подмножество, такое, что $M\ni 0$. Тогда для любой точки $x_0\notin M$ существует определенный на всем пространстве X непрерывный вещественный линейный функционал f_0, такой, что $f_0(x_0)>1$ и $f_0(x)\leqslant 1$ на M.

Теорема 4 (Мазур). Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство и M — некоторая выпуклая уравновешенная окрестность нуля в X. Тогда для любой точки $x_0\notin M$ существует непрерывный линейный функционал f_0 на X, такой, что

$$f_0(x_0)\geqslant\sup_{x\in M}|f_0(x)|.$$

Доказательство. Обозначим через p функционал Минковского множества M. Тогда $p(x_0)\geqslant 1$ и $p(x)\leqslant 1$ для $x\in M$. Функционал p непрерывен, так как M — окрестность нуля в X. Поэтому, согласно следствию 1 теоремы 1, существует такой непрерывный линейный функционал f_0 на X, что $f_0(x_0)=p(x_0)\geqslant 1$ и $|f_0(x)|\leqslant p(x)\leqslant 1$ при $x\in M$.

Теорема 5 (Хелли). Пусть X — некоторое B-пространство и $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — конечная система ограниченных линейных функционалов на X. Зададим произвольно n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Для того чтобы при каждом $\varepsilon > 0$ нашелся элемент $x_\varepsilon \in X$, удовлетворяющий условиям

$$f_i(x_\varepsilon) = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{и} \quad \|x_\varepsilon\| \leqslant \gamma + \varepsilon$$

(γ — произвольное положительное число), необходимо и достаточно, чтобы при любом выборе n чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ выполнялось неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| \leqslant \gamma \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\|.$$

Доказательство. Необходимость этого условия вытекает из определения нормы непрерывного линейного функционала. Докажем его достаточность. Без ограничения общности можно допустить, что функционалы f_j линейно независимы, так как в противном случае из $\{f_j\}$ можно выбрать подсистему линейно независимых функционалов, порождающих то же линейное подпространство, что и $\{f_j\}$.

Рассмотрим отображение $x \to \varphi(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ пространства X на гильбертово пространство $l^2(n)$, состоящее из всех векторов вида $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, с нормой $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{1/2}$. По теореме об открытости отображения (гл. II, § 5) при любом $\varepsilon > 0$ образ $\varphi(S_\varepsilon)$ шара $S_\varepsilon = \{x \in X;\ \|x\| \leqslant \gamma + \varepsilon\}$ содержит нулевой вектор пространства $l^2(n)$ в качестве своей внутренней точки. Предположим, что элемент $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ не принадлежит $\varphi(S_\varepsilon)$. Тогда, согласно приведенной выше теореме Мазура, существует непрерывный линейный функционал F на пространстве $l^2(n)$, такой, что

$$F((\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)) \geqslant \sup_{\|x\| \leqslant \gamma+\varepsilon} |F(\varphi(x))|.$$

Так как $l^2(n)$ — гильбертово пространство, функционал F определяется некоторым элементом $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in l^2(n)$ таким образом, что $F((\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j$. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j \geqslant \left|\sum_{j=1}^{n} f_j(x) \beta_j\right| \quad \text{при} \quad \|x\| \leqslant \gamma + \varepsilon.$$

Но верхняя грань правой части последнего неравенства при $\|x\| \leqslant \gamma + \varepsilon$ равна $(\gamma + \varepsilon)\left\|\sum_{j=1}^{n} f_j \beta_j\right\|$, а это противоречит условию теоремы. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.