7. Операторные топологии

Пусть X, Y — локально выпуклые линейные топологические пространства над одним и тем же скалярным полем (полем вещественных или комплексных чисел). Обозначим через $L(X, Y)$ совокупность всех непрерывных линейных операторов, отображающих X в Y. Множество $L(X, Y)$ с операциями

$$(\alpha T+\beta S)x=\alpha Tx+\beta Sx, \quad \text{где} \quad T, S\in L(X, Y) \quad \text{и} \quad x\in X,$$

образует линейное пространство. В этом линейном пространстве можно ввести различные топологии.

(1) Топология простой сходимости. Эта топология соответствует сходимости в каждой точке пространства X[1]; она определяется семейством полунорм вида

$$p(T)=p(T;\ x_1, x_2, \ldots, x_n;\ q)=\sup_{1\leqslant j\leqslant n} q(Tx_j),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольно выбранная конечная система элементов пространства X, а q — любая непрерывная полунорма на Y. Пространство $L(X, Y)$ с такой топологией мы будем обозначать через $L_s(X, Y)$[1]. Ясно, что это локально выпуклое линейное топологическое пространство.

(2) Топология ограниченной сходимости. Эта топология соответствует равномерной сходимости на ограниченных множествах, принадлежащих X[2]. Она определяется семейством полунорм вида

$$p(T)=p(T;\ B;\ q)=\sup_{x\in B} q(Tx),$$

где B — произвольное ограниченное множество из X, а q — любая непрерывная ограниченная полунорма на Y. Пространство $L(X, Y)$ с такой топологией мы обозначим через $L_b(X, Y)$. Ясно, что это локально выпуклое линейное топологическое пространство.

Всякое конечное множество точек пространства X ограничено, поэтому топология простой сходимости *слабее*, чем топология ограниченной сходимости, в том смысле, что открытые множества пространства $L_s(X, Y)$ принадлежат семейству открытых множеств пространства $L_b(X, Y)$, но не наоборот.

---

[1]) Эта топология соответствует сходимости в каждой точке $x\in X$ в том смысле, что условие существования в пространстве $L_s(X, Y)$ обобщенного предела $\lim_{\alpha\in A} T_\alpha=T$ в этом случае эквивалентно сходимости $\lim_{\alpha\in A} T_\alpha x=Tx$ для всех $x\in X$. — *Прим. перев.*

[2]) При такой топологии условие $\lim_{\alpha\in A} T_\alpha=T$ эквивалентно равномерной относительно значений $x\in B$ сходимости $\lim_{\alpha\in A} T_\alpha x=Tx$ обобщенной последовательности $T_\alpha x$ на всяком ограниченном множестве $B\subseteq X$. — *Прим. перев.*

Определение 1. В случае когда X и Y — нормированные линейные пространства, топологию в $L_s(X, Y)$ обычно называют *сильной операторной топологией*, а топологию в $L_b(X, Y)$ — *равномерной операторной топологией* [1]).

Сопряженные пространства. Слабая и слабая* топологии

Определение 1′. В частном случае, когда Y является полем вещественных или комплексных чисел с обычной топологией, $L(X, Y)$ называется пространством, *сопряженным* к X, и обозначается через X'. Пространство X', таким образом, состоит из всех непрерывных линейных функционалов на X. Топологию простой сходимости в пространстве X' мы будем называть в этом случае *слабой* топологией* [2]). Сопряженное к X пространство X', топологизированное таким способом, мы назовем *слабым* сопряженным пространством*; иногда мы будем обозначать его через X'_{w^*}. Топологию ограниченной сходимости в пространстве X' мы назовем *сильной топологией*. Пространство X' с такой топологией мы иногда будем обозначать X'_s и называть *сильным сопряженным пространством*.

Определение 2. Для любых $x \in X$ и $x' \in X'$ обозначим символом $\langle x, x' \rangle$ или $x'(x)$ значение функционала x' в точке x. Таким образом, слабая* топология в X', т. е. топология пространства X'_{w^*}, определяется семейством полунорм вида

$$p(x') = p(x';\, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} |\langle x_j, x' \rangle|,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольная конечная система элементов пространства X. Сильная топология в X', т. е. топология пространства X'_s, определяется системой полунорм вида

$$p(x') = p(x';\, B) = \sup_{x\ B} |\langle x, x' \rangle|,$$

где B — произвольное ограниченное множество пространства X.

Теорема 1. Если X — нормированное линейное пространство, то его сильное сопряженное X'_s представляет собой B-пространство с нормой

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|.$$

---

[1]) Существуют и другие интересные и важные для приложений типы операторных топологий (см., например, Данфорд — Шварц [1], Бурбаки [2]). — *Прим. перев.*

[2]) Если X — нормированное пространство, то „слабая* топология“ в X', согласно приведенным ранее определениям, — это „сильная операторная топология“ в X'. — *Прим. перев.*

Доказательство. Обозначим через B произвольное ограниченное множество из X. Тогда $\sup\limits_{b \in B}\|b\| = \beta < \infty$, и поэтому из неравенства $\|f\| \leqslant \alpha$ следует, что $p(f; B) = \sup\limits_{b \in B}|f(b)| \leqslant \sup\limits_{\|x\| \leqslant \beta}|f(x)| \leqslant \alpha\beta$. С другой стороны, единичный шар $S = \{x; \|x\| \leqslant 1\}$ пространства X является ограниченным множеством, и поэтому $\|f\| = p(f; S)$. Это показывает, что топология пространства X'_s эквивалентна топологии, определяемой нормой $\|f\|$.

Полнота пространства X'_s доказывается следующим образом. Пусть последовательность $\{f_n\}$, принадлежащая X'_s, удовлетворяет условию $\lim\limits_{n, m \to \infty}\|f_n - f_m\| = 0$. Тогда для любого $x \in X$ мы имеем $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\| \cdot \|x\| \to 0$ при $n, m \to \infty$, следовательно, существует конечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$. Линейность функционала f вполне очевидна. Его непрерывность вытекает из того, что $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ равномерно на единичном шаре S. Отсюда же следует, что $\lim\limits_{n \to \infty}\|f_n - f\| = 0$.

Следующая теорема доказывается совершенно аналогично.

Теорема 2. Если X, Y — нормированные линейные пространства, то равномерная операторная топология пространства $L_b(X, Y)$ определяется нормой оператора

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1}\|Tx\|.$$

Определение 3. Назовем *слабой топологией* локально выпуклого линейного топологического пространства X топологию, определяемую семейством полунорм вида

$$p(x) = p(x; x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = \sup_{1 \leqslant j \leqslant n}|\langle x, x'_j \rangle|,$$

где $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ — произвольная конечная система элементов пространства X'. Пространство X с такой топологией мы будем иногда обозначать через X_w.

8. Вложение пространства X во второе сопряженное пространство X''

Сначала докажем следующую теорему.

Теорема 1 (Банах). Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство и X' — его сопряженное. Линейный функционал $f(x')$ на X' имеет вид

$$f(x') = \langle x_0, x' \rangle,$$

где x_0 — некоторая точка из X, тогда и только тогда, когда функционал f непрерывен в слабой* топологии пространства X'.