Доказательство. Обозначим через B произвольное ограниченное множество из X. Тогда $\sup_{b\in B}\|b\|=\beta<\infty$, и поэтому из неравенства $\|f\|\leqslant\alpha$ следует, что $p(f;B)=\sup_{b\in B}|f(b)|\leqslant\sup_{\|x\|\leqslant\beta}|f(x)|\leqslant\alpha\beta$. С другой стороны, единичный шар $S=\{x;\ \|x\|\leqslant 1\}$ пространства X является ограниченным множеством, и поэтому $\|f\|=p(f;\ S)$. Это показывает, что топология пространства X'_s эквивалентна топологии, определяемой нормой $\|f\|$.

Полнота пространства X'_s доказывается следующим образом. Пусть последовательность $\{f_n\}$, принадлежащая X'_s, удовлетворяет условию $\lim_{n,m\to\infty}\|f_n-f_m\|=0$. Тогда для любого $x\in X$ мы имеем $|f_n(x)-$ $-f_m(x)|\leqslant\|f_n-f_m\|\cdot\|x\|\to 0$ при $n,\ m\to\infty$, следовательно, существует конечный предел $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$. Линейность функционала f вполне очевидна. Его непрерывность вытекает из того, что $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=$ $=f(x)$ равномерно на единичном шаре S. Отсюда же следует, что $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$.

Следующая теорема доказывается совершенно аналогично.

Теорема 2. Если X, Y — нормированные линейные пространства, то равномерная операторная топология пространства $L_b(X,\ Y)$ определяется нормой оператора

$$\|T\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|.$$

Определение 3. Назовем *слабой топологией* локально выпуклого линейного топологического пространства X топологию, определяемую семейством полунорм вида

$$p(x)=p\left(x;\ x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_n\right)=\sup_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\langle x,\ x'_j\rangle\right|,$$

где $x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_n$ — произвольная конечная система элементов пространства X'. Пространство X с такой топологией мы будем иногда обозначать через X_w.

8. Вложение пространства X во второе сопряженное пространство X″

Сначала докажем следующую теорему.

Теорема 1 (Банах). Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство и X' — его сопряженное. Линейный функционал $f(x')$ на X' имеет вид

$$f(x')=\langle x_0,\ x'\rangle,$$

где x_0 — некоторая точка из X, тогда и только тогда, когда функционал f непрерывен в слабой* топологии пространства X'.

Доказательство. Необходимость приведенного условия очевидна, так как выражение $|\langle x_0, x'\rangle|$ представляет собой одну из полунорм, определяющих в X' слабую* топологию. Достаточность доказывается следующим образом. Из непрерывности функционала $f(x')$ в слабой* топологии пространства X' вытекает, что существует конечная система точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$, такая, что $|f(x')| \leqslant \sup\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |\langle x_j, x'\rangle|$. Поэтому

$$\text{если } f_i(x') \equiv \langle x_i, x'\rangle = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \text{ то } f(x') = 0.$$

Рассмотрим линейное отображение $L : X' \to l^2(n)$, определенное формулой

$$L(x') = (f_1(x'), \quad f_2(x'), \ldots, f_n(x')).$$

Из условия $L(x'_1) = L(x'_2)$ вытекает равенство $L(x'_1 - x'_2) = 0$, а это означает, что $f_i(x'_1 - x'_2) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и, следовательно, $f(x'_1 - x'_2) = 0$. Поэтому формула

$$F(L(x')) = F(f_1(x'), f_2(x'), \ldots, f_n(x')) = f(x')$$

определяет непрерывное линейное отображение F, заданное на подпространстве $L(X')$ пространства $l^2(n)$. Это отображение может быть продолжено до непрерывного линейного функционала, определенного на всем пространстве $l^2(n)$. Такое продолжение возможно, так как пространство $l^2(n)$ конечномерно (этот случай, очевидно, проще, чем продолжение функционала в бесконечномерном линейном пространстве, так что нет необходимости привлекать теорему Хана — Банаха). Это продолжение мы обозначим той же буквой F. Если элементы пространства $l^2(n)$ записывать в виде

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j, \text{ где } e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots, 0),$$

причем 1 стоит в выражении для e_i на i-м месте, то ясно, что

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} y_j \alpha_j, \qquad \alpha_j = F(e_j).$$

Поэтому

$$f(x') = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(x') = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle x_j, x'\rangle = \Big\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, x' \Big\rangle,$$

и достаточность сформулированного условия доказана.

Следствие. Для каждой точки $x_0 \in X$ формула $f_0(x') = \langle x_0, x'\rangle$ определяет на пространстве X'_s непрерывный линейный функционал

$f_0(x')$ [1]). При этом отображение

$$x_0 \to f_0 = Jx_0$$

пространства X в пространство $(X'_s)'_s$ удовлетворяет условию

$$J(x_1 + x_2) = Jx_1 + Jx_2, \qquad J(\alpha x) = \alpha Jx.$$

Теорема 2. Если X — нормированное линейное пространство, то отображение J *изометрично*, т. е. $\|Jx\| = \|x\|$.

Доказательство. Так как $|f_0(x')| = |\langle x_0, x'\rangle| \leqslant \|x_0\| \cdot \|x'\|$, то $\|f_0\| \leqslant \|x_0\|$. С другой стороны, если $x_0 \neq 0$, то, согласно следствию 2 теоремы 1, § 6, существует такой элемент $x'_0 \in X'$, что $\langle x_0, x'_0\rangle = \|x_0\|$ и $\|x'_0\| = 1$. Поэтому $f_0(x'_0) = \langle x_0, x'_0\rangle = \|x_0\|$, откуда $\|f_0\| \geqslant \|x_0\|$. Тем самым мы показали, что $\|Jx\| = \|x\|$.

Замечание. Пространство $(X'_s)'_s$ как сильное сопряженное к X'_s представляет собой B-пространство. Следовательно, нормированное линейное пространство X можно рассматривать как линейное подпространство B-пространства $(X'_s)'_s$, вложенное с помощью отображения $x \to Jx$. Поэтому сильное замыкание [2]) множества JX в B-пространстве $(X'_s)'_s$ дает конкретную реализацию пополнения пространства X.

Определение 4. Нормированное линейное пространство X называется *рефлексивным*, если оно может быть отождествлено со своим вторым сопряженным пространством $(X'_s)'_s$ с помощью определенного выше соответствия $x \to Jx$. Мы уже знаем (гл. III, § 6), что гильбертовы пространства рефлексивны. Как замечено выше, $(X'_s)'_s$ является B-пространством, поэтому всякое рефлексивное нормированное пространство должно быть B-пространством.

Теорема 3. Пусть X — некоторое B-пространство и x''_0 — произвольный ограниченный линейный функционал на X'_s. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и всякой конечной системы элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ пространства X'_s существует элемент $x_0 \in X$, такой, что

$$\|x_0\| \leqslant \|x''_0\| + \varepsilon \quad \text{и} \quad f_j(x_0) = x''_0(f_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

---

[1]) Функционал $f_0(x') = \langle x_0, x'\rangle$, как было показано, непрерывен в слабой* топологии X'_{w^*}, поэтому он непрерывен и в более сильной топологии X'_s. — *Прим. перев.*

[2]) То есть замыкание в сильной топологии пространства $(X'_s)'_s$. — *Прим перев.*

Доказательство. Применяя теорему Хелли (теорема 5, § 6), мы устанавливаем, что для любой системы чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_0''(f_j)\right| = \left|x_0''\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j\right)\right| \leqslant \gamma \left\|\sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j\right\|,$$

$$\text{где } \gamma = \|x_0''\|, \quad \alpha_j = x_0''(f_j).$$

Применяя эту теорему еще раз, мы находим элемент $x_0 \in X$, для которого $\|x_0\| \leqslant \gamma + \varepsilon = \|x_0''\| + \varepsilon$ и $x_0(f_j) = \alpha_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Следствие. Единичный шар $S = \{x \in X;\ \|x\| \leqslant 1\}$ B-пространства X является плотным в единичном шаре пространства $(X_s')_s'$ в слабой* топологии пространства $(X_s')'$.

9. Примеры сопряженных пространств

Пример 1. Пространство $(c_0)' = (l^1)$.

Всякому элементу $f \in (c_0)'$ соответствует единственным образом определенный элемент $y_f = \{\eta_n\} \in (l^1)$, такой, что

$$\langle x, f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n \quad \text{и} \quad \|f\| = \|y_f\| \tag{1}$$

для всех $x = \{\xi_n\} \in (c_0)$. Обратно, каждый элемент $y = \{\eta_n\} \in (l^1)$ определяет некоторый элемент $f_y \in (c_0)'$, такой, что

$$\langle x, f_y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n \quad \text{и} \quad \|f_y\| = \|y\| \tag{1'}$$

для всех $x = \{\xi_n\} \in (c_0)$.

Доказательство. Определим вектор e_k формулой

$$e_k = (\overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{k-1}, 1, 0, 0, \ldots) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Для любых $x = \{\xi_n\} \in (c_0)$ и $f \in (c_0)'$

$$\langle x, f\rangle = \lim_{k\to\infty} \left\langle \sum_{n=1}^{k} \xi_n e_n, f\right\rangle = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \xi_n \eta_n, \quad \eta_n = f(e_n),$$

так как $s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{k} \xi_n e_n = x$. Положим $\eta_n = \xi_n |\eta_n|$ при $\eta_n \neq 0$ и $\varepsilon_n = \infty$ при $\eta_n = 0$. Выберем точку $x^{(n_0)} = \{\xi_n\} \in (c_0)$ так, что $\xi_n = \varepsilon_n^{-1}$ при $n \leqslant n_0$ и $\xi_n = 0$ при $n > n_0$. Тогда $\|x^{(n_0)}\| = 1$, и по-