Доказательство. Применяя теорему Хелли (теорема 5, § 6), мы устанавливаем, что для любой системы чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\beta_j\alpha_j\right|=\left|\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_0''(f_j)\right|=\left|x_0''\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j f_j\right)\right|\leqslant\gamma\left\|\sum_{j=1}^{n}\beta_j f_j\right\|,$$

$$\text{где } \gamma=\|x_0''\|, \quad \alpha_j=x_0''(f_j).$$

Применяя эту теорему еще раз, мы находим элемент $x_0\in X$, для которого $\|x_0\|\leqslant\gamma+\varepsilon=\|x_0''\|+\varepsilon$ и $x_0(f_j)=\alpha_j$ $(j=1, 2, \ldots, n)$.

Следствие. Единичный шар $S=\{x\in X;\ \|x\|\leqslant 1\}$ B-пространства X является плотным в единичном шаре пространства $(X_s')_s'$ в слабой* топологии пространства $(X_s')'$.

9. Примеры сопряженных пространств

Пример 1. Пространство $(c_0)'=(l^1)$.

Всякому элементу $f\in(c_0)'$ соответствует единственным образом определенный элемент $y_f=\{\eta_n\}\in(l^1)$, такой, что

$$\langle x, f\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\eta_n \quad \text{и} \quad \|f\|=\|y_f\| \tag{1}$$

для всех $x=\{\xi_n\}\in(c_0)$. Обратно, каждый элемент $y=\{\eta_n\}\in(l^1)$ определяет некоторый элемент $f_y\in(c_0)'$, такой, что

$$\langle x, f_y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\eta_n \quad \text{и} \quad \|f_y\|=\|y\| \tag{1'}$$

для всех $x=\{\xi_n\}\in(c_0)$.

Доказательство. Определим вектор e_k формулой

$$e_k=(\overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{k-1}, 1, 0, 0, \ldots) \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

Для любых $x=\{\xi_n\}\in(c_0)$ и $f\in(c_0)'$

$$\langle x, f\rangle=\lim_{k\to\infty}\left\langle\sum_{n=1}^{k}\xi_n e_n, f\right\rangle=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\xi_n\eta_n, \quad \eta_n=f(e_n),$$

так как $s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{k}\xi_n e_n=x$. Положим $\eta_n=\xi_n|\eta_n|$ при $\eta_n\neq 0$ и $\varepsilon_n=\infty$ при $\eta_n=0$. Выберем точку $x^{(n_0)}=\{\xi_n\}\in(c_0)$ так, что $\xi_n=\varepsilon_n^{-1}$ при $n\leqslant n_0$ и $\xi_n=0$ при $n>n_0$. Тогда $\|x^{(n_0)}\|=1$, и поэтому $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} |\langle x, f\rangle| \geqslant |\langle x^{(n_0)}, f\rangle| = \sum\limits_{n=1}^{n_0} |\eta_n|$. Полагая $n_0 \to \infty$, мы видим, что $y_f = \{\eta_n\} \in (l^1)$ и $\|y_f\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\eta_n| \leqslant \|f\|$.

Обратно, если $y = \{\eta_n\} \in (l^1)$, то $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n\right| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ для всех $x = \{\xi_n\} \in (c_0)$, и поэтому y определяет элемент $f_y \in (c_0)'$, для которого $\|f_y\| \leqslant \|y\|$.

Пример 2. Пространство $(c)' = (l^1)$.

Всякий элемент $x = \{\xi_n\} \in (c)$ можно представить в виде $x = \xi_0 e_0 + s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{k} (\xi_n - \xi_0) e_n$, где $\xi_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$, $e_0 = \{1, 1, 1, \ldots\}$. Таким образом, для всякого элемента $f \in (c)'$

$$\langle x, f\rangle = \xi_0 \langle e_0, f\rangle + \lim_{k\to\infty} \left\langle \sum_{n=1}^{k} (\xi_n - \xi_0) e_n, f \right\rangle =$$

$$= \xi_0 \eta_0' + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \xi_0) \eta_n, \qquad (2)$$

где $\eta_0' = \langle e_0, f\rangle$ и $\eta_n = \langle e_n, f\rangle$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Как и в предыдущем примере, выберем точку $x^{(n_0)} = \{\xi_n\} \in (c_0) \subseteq (c)$, для которой

$$\|x^{(n_0)}\| \leqslant 1, \quad \xi_0 = \lim_{n\to\infty} \xi_n = 0 \text{ и } \langle x^{(n_0)}, f\rangle = \sum_{n=1}^{n_0} |\eta_n|.$$

Тогда $\{\eta_n\}^{\infty} \in (l^1)$, так как $|\langle x^{(n_0)}, f\rangle| \leqslant \|x^{(n_0)}\| \cdot \|f\|$. Положим теперь

$$\eta_0' - \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n = \eta_0.$$

Из условия (2) получаем

$$\langle x, f\rangle = \xi_0 \eta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n, \text{ где } x = \{\xi_n\} \in (c) \text{ и } \xi_0 = \lim_{n\to\infty} \xi_n. \qquad (2')$$

Положим снова $\eta_n = \varepsilon_n |\eta_n|$ при $\eta_n \neq 0$ и $\varepsilon_n = \infty$ при $\eta_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Возьмем элемент $x = \{\xi_n\} \in (c)$, такой, что

$$\xi_n = \varepsilon_n^{-1} \quad \text{при} \quad n \leqslant n_0 \quad \text{и} \quad \xi_n = \varepsilon_0^{-1} \quad \text{при} \quad n > n_0.$$

В этом случае $\|x\| \leqslant 1$, $\xi_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \varepsilon_0^{-1}$ и $\langle x, f\rangle = |\eta_0| + \sum\limits_{n=1}^{n_0} |\eta_n| + \varepsilon_0^{-1} \sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} \eta_n$. Поэтому $|\eta_0| + \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\eta_n| \leqslant \|f\|$.

Обратно, если выбрать $y=\{\eta_n\}_0^\infty$ так, что $\|y\|=|\eta_0|+\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|<\infty$, то элемент

$$\eta_0\cdot\lim_{n\to\infty}\xi_n+\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\eta_n,$$

где $x=\{\xi_n\}_1^\infty\in(c)$, определит вектор $f_y\in(c)'$, такой, что $\|f_y\|\leqslant\leqslant|\eta_0|+\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|$.

Таким образом, мы показали, что $(c)'=(l^1)$.

Пример 3. Пространство $L^p(S, \mathfrak{B}, m)'=L^q(S, \mathfrak{B}, m)(1\leqslant p<<\infty$ и $p^{-1}+q^{-1}=1)$.

Всякому элементу $f\in L^p(S)'$ соответствует некоторый элемент $y_f\in L^q(S)$, такой, что

$$\langle x, f\rangle=\int_S x(s)y_f(s)m(ds) \text{ для всех } x\in L^p(S) \text{ и } \|f\|=\|y_f\|. \quad (3)$$

Обратно, произвольная точка $y\in L^q(S)$ определяет некоторый элемент $f_y\in L^p(S)'$, такой, что

$$\langle x, f_y\rangle=\int_S x(s)y(s)m(ds) \text{ для всех } x\in L^p(S) \text{ и } \|f_y\|=\|y\|. \quad (3')$$

Доказательство. Пусть $S=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j$, где множества B_j удовлетворяют условию $0<m(B_j)<\infty$; положим $B^{(n)}\equiv\bigcup_{j=1}^{n}B_j$. При любом фиксированном n характеристическая функция $C_B(s)$ всякого множества $B\subseteq B^{(n)}$ [1]) принадлежит $L^p(S)$. Поэтому функция множества $\psi(B)=\langle C_B, f\rangle$ σ-аддитивна и m-абсолютно непрерывна на множествах $B\subseteq B^{(n)}$. По теореме Лебега — Никодима (гл. III, § 8) существует функция $y_n(s)\in L^1(B^{(n)}, \mathfrak{B}^{(n)}, m)$, такая, что

$$\psi(B)=\int_B y_n(s)m(ds) \text{ для всех } B\subseteq B^{(n)},$$

где $\mathfrak{B}^{(n)}$ — это семейство множеств вида $\mathfrak{B}^{(n)}=\{B\cap B^{(n)}; B\in\mathfrak{B}\}$. Поэтому, полагая $y(s)=y_n(s)$ для $s\in B^{(n)}$, мы получаем

$$\langle C_B, f\rangle=\int_B y(s)m(ds) \quad \text{для всех } B\in\mathfrak{B}^{(n)} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

[1]) Здесь и далее подразумевается, что множества $B\subseteq B^{(n)}$, о которых идет речь, принадлежат $\mathfrak{B}$. — *Прим. перев.*

Следовательно, для всякой простой функции x

$$\langle x, f\rangle = \int_S x(s)\, y(s)\, m(ds). \tag{4}$$

Выберем $x \in L^p(S)$ и положим

$$x_n(s) = \begin{cases} x(s) & \text{при } |x(s)| \leqslant n,\ s \in B^{(n)}, \\ 0 & \text{при других значениях } s. \end{cases}$$

Разобьем множество точек $\{z;\ |z| \leqslant n\}$ комплексной плоскости на конечное число непересекающихся бэровских множеств $M_{n,k,t}$ $(t = 1, 2, \ldots, d_{k,n})$ диаметра $\leqslant 1/k$. Для каждой из функций $x_n(s) \in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)$ определим функцию $x_{n,k}(s)$ следующим условием:

> для точек s, в которых $x_n(s) \in M_{n,k,t}$, значение $x_{n,k}(s)$ равно постоянной z, выбранной так, что z принадлежит замыканию $M^a_{n,k,t}$ множества $M_{n,k,t}$ и $|z| = \inf\limits_{w \in M_{n,k,t}} |w|$.

Тогда $|x_{n,k}(s)| \leqslant |x_n(s)|$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n,k}(s) = x_n(s)$, поэтому, согласно лемме Лебега — Фату, $s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x_{n,k} = x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Применяя лемму Лебега — Фату еще раз, находим, что

$$\langle x_n, f\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle x_{n,k}, f\rangle = \lim_{k\to\infty} \int_S x_{n,k}(s)\, y(s)\, m(ds) =$$

$$= \int_S \lim_{k\to\infty} x_{n,k}(s)\, y(s)\, m(ds) = \int_S x_n(s)\, y(s)\, m(ds). \tag{5}$$

Так как $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, мы видим, что $\langle x, f\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, f\rangle$. Для всякого комплексного числа z положим $a(z) = e^{-i\theta}$ при $z = re^{i\theta}$ и $a(0) = 0$. Тогда $\|x\| \geqslant \|(|x_n| \cdot a(y))\|$ и, следовательно,

$$\|f\| \cdot \|x\| \geqslant \langle |x_n|\, a(y), f\rangle = \int_S |x_n(s)| \cdot |y(s)|\, m(ds).$$

Отсюда на основании леммы Лебега — Фату мы заключаем, что $\|f\| \cdot \|x\| \geqslant \int_S |x(s)| \cdot |y(s)|\, m(ds)$ и, таким образом, функция $x(s)\, y(s)$ принадлежит $L^1(S)$. Поэтому, полагая в формуле (5) $n \to \infty$, мы получаем соотношение

$$\langle x, f\rangle = \int_S x(s)\, y(s)\, m(ds) \qquad \text{для всех } x \in L^p(S).$$

Покажем теперь, что $y \in L^q(S)$. С этой целью определим функции $y_n(s)$:

$$y_n(s) = \begin{cases} y(s) & \text{при } s \in B^{(n)},\ |y(s)| \leqslant n, \\ 0 & \text{при других значениях } s. \end{cases}$$

Тогда $y_n \in L^q(S)$ и, как было доказано выше,

$$\|f\| \cdot \|x\| \geqslant \langle |x| \cdot a(y),\ f\rangle = \int_S |x(s)| \cdot |y(s)|\, m(ds) \geqslant$$

$$\geqslant \int_S |x(s)| \cdot |y_n(s)|\, m(ds).$$

Полагая $x(s) = |y_n(s)|^{q/p}$ и применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\int_S |x(s)| \cdot |y_n(s)|\, m(ds) = \left(\int_S |x(s)|^p\, m(ds)\right)^{1/p} \cdot \left(\int_S |y_n(s)|^q\, m(ds)\right)^{1/q}.$$

Отсюда $\|f\| \geqslant \|y_n\| = \left(\int_S |y_n(s)|^q\, m(ds)\right)^{1/q}$ при $p > 1$, а при $p = 1$ мы имеем $\|f\| \geqslant \|y_n\| = \operatorname*{essential\ sup}_{s \in S} |y_n(s)|$.

Полагая $n \to \infty$ и применяя лемму Лебега — Фату, мы находим, что $y \in L^q(S)$ и $\|f\| \geqslant \|y\|$. С одной стороны, всякая точка $y \in L^q(S)$ определяет с помощью формулы $\langle x, f\rangle = \int_S x(s)\, y(s)\, m(ds)$ некоторый элемент $f \in L^p(S)'$ (это вытекает из неравенства Гёльдера). При этом неравенство Гёльдера показывает, что $\|f\| \leqslant \|y\|$. Итак, доказательство закончено.

Замечание. Попутно мы доказали, что

$$(l^p)' = (l^q) \qquad (1 \leqslant p < \infty,\ p^{-1} + q^{-1} = 1).$$

Пример 4. Допустим, что пространство с мерой $(S, \mathfrak{B}, m)$, такое, что $m(S) < \infty$, обладает следующим свойством: для любого множества $B \in \mathfrak{B}$, мера которого удовлетворяет неравенству $0 < m(B) = \delta < \infty$, и произвольного положительного целого n существует подмножество B_n в B, такое, что $\delta(n+1)^{-1} \leqslant m(B_n) \leqslant \delta n^{-1}$. Тогда не существует никакого непрерывного линейного функционала, принадлежащего пространству $M(S, \mathfrak{B}, m)'$, кроме тождественно равного нулю.

Доказательство. Всякий элемент $x \in L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ принадлежит пространству $M(S, \mathfrak{B}, m)$, и топология в $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ сильнее, чем в $M(S, \mathfrak{B}, m)$, поэтому сужение любого функционала $f \in M(S, \mathfrak{B}, m)'$ на $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ определяет непрерывный линейный функционал

$f_0 \in L^1(S, \mathfrak{B}, m)'$. Таким образом, существует функция $y \in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)$, такая, что

$$\langle x, f\rangle = \langle x, f_0\rangle = \int_S x(s)\, y(s)\, m(ds) \text{ для всех } x \in L^1(S, \mathfrak{B}, m).$$

Так как множество $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ плотно в $M(S, \mathfrak{B}, m)$ в топологии пространства $M(S, \mathfrak{B}, m)$, то из условия $f \neq 0$ вытекает, что $f_0 \neq 0$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что множество $B = \{s;\ |y(s)| \geqslant \varepsilon\}$ имеет меру $m(B) = \delta > 0$. Пусть $B_n \subseteq B$ — множество, указанное в условии теоремы. Положим $y(s) = re^{i\theta}$ для $s \in B$ и введем функцию $x_n(s): x_n(s) = e^{-i\theta}$ при $s \in B_n$ и $x_n(s) = 0$ при прочих значениях s. Тогда функции $z_n(s) = nx_n(s)$ сходятся по мере к нулю, т. е. $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ в пространстве $M(S, \mathfrak{B}, m)$. Но, с другой стороны,

$$\lim_{n\to\infty} \langle z_n, f\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle z_n, f_0\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_S z_n(s)\, y(s)\, m(ds) \geqslant \delta\varepsilon > 0,$$

что противоречит непрерывности функционала f. Итак, предположение $f \neq 0$ приводит к противоречию.

Пример 5. Пространство $L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)'$.

Пусть задан некоторый элемент $f \in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)'$. Для всякого множества $B \in \mathfrak{B}$ определим функцию $\psi(B) = f(C_B)$, где $C_B(s)$ — характеристическая функция множества B. Тогда выполняются следующие условия:

$$\text{если } B_1 \cap B_2 = \emptyset, \text{ то } \psi(B_1 + B_2) = \psi(B_1) + \psi(B_2), \tag{6}$$

т. е. функция ψ *конечно аддитивна*;

вещественная часть $\psi_1(B)$ и мнимая часть $\psi_2(B)$ функции $\psi(B)$ имеют ограниченные полные вариации, т. е.

$$\sup_B |\psi_i(B)| < \infty \quad (i = 1, 2); \tag{7}$$

если $m(B) = 0$, то $\psi(B) = 0$, т. е. функция ψ *m-абсолютно непрерывна*. (8)

Условие (6) следует из линейности функционала f, а (7) и (8) вытекают из неравенства $|\psi(B)| \leqslant \|f\| \cdot \|C_B\|$.

Для произвольной точки $x \in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)$ рассмотрим разбиение круга $\{z;\ |z| \leqslant \|x\|\}$ комплексной плоскости z на конечное число непересекающихся бэровских множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, диаметры которых не превосходят некоторого положительного числа ε. Положим $B_i = \{s \in S;\ x(s) \in A_i\}$. При любом выборе точек $\alpha_i \in A_i$ справедливы неравенства

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_{B_i} \right\| \leqslant \varepsilon,$$

и поэтому

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi(B_i) \right| \leqslant \| f \| \cdot \varepsilon.$$

Пусть теперь $n \to \infty$ так, что при этом $\varepsilon \downarrow 0$; тогда

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi(B_i) \tag{9}$$

независимо от способа разбиения $\{z;\ |z| \leqslant \|x\|\} = \sum_{i=1}^{n} A_i$ и выбора точек $\alpha_i \in A_i$. Предел, стоящий в правой части выражения (9), называется *интегралом Радона* функции $x(s)$ по *конечно аддитивной* мере ψ. Таким образом,

$$f(x) = \int_S x(s)\psi(ds) \text{ (интеграл Радона)}$$

$$\text{для всех } x \in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m), \tag{10}$$

и поэтому

$$\|f\| = \sup_{\operatorname{ess\,sup}|x(s)| \leqslant 1} \left| \int_S x(s)\psi(ds) \right|. \tag{11}$$

Справедливо и обратное, а именно если функция ψ удовлетворяет условиям (6), (7) и (8), то выражение (10) определяет некоторый элемент $f \in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)'$, и при этом имеет место формула (11).

Мы доказали, следовательно, что $L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)'$ — это пространство, состоящее из всех функций множества ψ, удовлетворяющих условиям (6), (7) и (8), с нормой, определяемой формулой (11). Правая часть формулы (11) называется *полной вариацией* функции ψ.

Замечание. Из полученных результатов следует, что при $1 < p < \infty$ пространство $L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ рефлексивно. Однако пространство $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$, вообще говоря, не является рефлексивным.

Пример 6. Пространство $C(S)'$.

Пусть S — бикомпактное топологическое пространство. Тогда пространство $C(S)'$, сопряженное пространству $C(S)$ комплексных непрерывных функций на S, можно представить следующим образом: каждому элементу $f \in C(S)'$ соответствует единственным образом определенная комплексная мера Бэра μ на S, такая, что

$$f(x) = \int_S x(s)\mu(ds) \quad \text{для всех } x \in C(S), \tag{12}$$

и поэтому

$$\|f\| = \sup_{\sup_S |x(s)| \leqslant 1} \left| \int_S x(s)\mu(ds) \right|, \tag{13}$$

где выражение в правой части равно полной вариации меры μ на множестве S.

Обратно, всякая мера Бэра μ на S, такая, что правая часть формулы (13) для нее конечна, определяет при помощи формулы (12) непрерывный линейный функционал $f \in C(S)'$, и его норма выражается формулой (13). Более того, если мы возьмем вещественный функционал f на вещественном B-пространстве $C(S)$, то соответствующая мера μ тоже будет вещественной. Если же, кроме того, функционал f *положителен*, т. е. $f(x) \geqslant 0$ для всех неотрицательных функций $x(s)$, то и соответствующая мера μ оказывается *положительной*, т. е. $\mu(B) \geqslant 0$ для всякого множества $B \in \mathfrak{B}$.

Замечание. Сформулированный выше результат известен как теорема Рисса — А. А. Маркова — Какутани и представляет собой одну из основных теорем теории топологических мер. Доказательство можно найти в курсах теории меры, например в книгах: Халмош [1], Данфорд — Шварц [1].

Литература к главе IV

По поводу теорем Хана — Банаха и связанных с ними вопросов см. Банах [1], Бурбаки [2], Кёте [1].

Важную роль выпуклых множеств в нормированном линейном пространстве заметил Мазур [2]. Доказательство теоремы Хелли, приведенное в этой книге, принадлежит Мимура [не опубликовано].