ГЛАВА V

Сильная сходимость и слабая сходимость

В этой главе мы рассмотрим некоторые важные проблемы, относящиеся к сильной, слабой и слабой* сходимости, включая вопросы, связанные со сравнением сильной и слабой измеримости, сильной и слабой аналитичности и пр. Мы познакомимся также с теорией интегрирования функций, принимающих значения в B-пространстве, т. е. с интегралами Бохнера. В приложении к этой главе излагается общая теория слабых топологий и сопряженности в локально выпуклых линейных топологических пространствах.

1. Слабая сходимость и слабая сходимость*

Слабая сходимость

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ элементов нормированного пространства X называется *слабо сходящейся*, если для каждого функционала $f \in X'_s$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Если существует такой элемент $x_\infty \in X$, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_\infty)$ для всех $f \in X'_s$, то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *слабо сходится к элементу* x_∞. В этом случае, согласно теореме Хана — Банаха (следствие 2 теоремы 1, гл. IV, § 6), элемент x_∞ определен единственным образом; мы будем писать $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_\infty$ или „$x_n \to x_\infty$ слабо". Пространство X называется *секвенциально слабо полным* [1]), если всякая слабо сходящаяся последовательность его элементов слабо сходится к некоторому элементу этого пространства.

Пример. Пусть $\{x_n(s)\}$ — последовательность равномерно ограниченных непрерывных функций из $C[0, 1]$, сходящаяся к некоторой разрывной функции $z(s)$ на отрезке $[0, 1]$. Тогда, поскольку $C[0, 1]'$ — пространство мер Бэра на $[0, 1]$ с ограниченными полными вариациями,

[1]) Автор применяет здесь термин „секвенциально слабо полное пространство", который обычно используется, чтобы отличить этот вид полноты от понятия полноты, связанного со сходимостью фундаментальных обобщенных последовательностей. Для нормированных пространств эти понятия эквивалентны. — *Прим. перев.*

последовательность $\{x_n(s)\}$ представляет собой пример слабо сходящейся последовательности из $C[0, 1]$, которая не сходится слабо ни к какому элементу пространства $C[0, 1]$.

Теорема 1. (1°) Если $s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty$, то $w\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty$; обратное, вообще говоря, неверно. (2°) Всякая слабо сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ сильно ограничена[1]; в частности, если $w\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty$, то последовательность $\{\|x_n\|\}$ ограничена и $\|x_\infty\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.

Доказательство. (1°) Первое утверждение вытекает из неравенства $|f(x_n) - f(x_\infty)| \leqslant \|f\| \cdot \|x_n - x_\infty\|$. Тот факт, что обратное утверждение неверно, можно продемонстрировать на примере последовательности $\{x_n\}$ из гильбертова пространства (l^2) вида

$$x_n = \left\{\xi_m^{(n)}\right\}, \text{ где } \xi_m^{(n)} = \delta_{n,m} \quad \left(\delta_{n,m} = 0 \text{ при } n \neq m, \ \delta_{n,n} = 1\right).$$

Действительно, значение всякого непрерывного линейного функционала из $(l^2)'$ в точке $x = \{\xi_n\}$ имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \bar{\eta}_n$, где $\{\eta_n\} \in (l^2)$. Поэтому $w\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, но последовательность $\{x_n\}$ не сходится сильно к нулю, так как $\|x_n\| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

(2°) Рассмотрим последовательность непрерывных линейных функционалов X_n, определенных на B-пространстве X_s' формулой $X_n(f) = \langle x_n, f\rangle$. Применяя к ней теорему о резонансе (гл. II, § 1), мы получим доказательство второго утверждения теоремы.

Теорема 2 (Мазур). Пусть $w\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty$ в нормированном линейном пространстве X. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такая *выпуклая комбинация* $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \left(\alpha_j \geqslant 0, \ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1\right)$ элементов x_j, что $\left\| x_\infty - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right\| \leqslant \varepsilon$.

Доказательство. Рассмотрим совокупность M_1 всех элементов вида $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$, для которых $\alpha_j \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$. Заменяя x_∞ и x_j соответственно на $(x_\infty - x_1)$ и $(x_j - x_1)$, мы можем считать, что $0 \in M_1$. Предположим, что $\|x_\infty - u\| > \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и всякого $u \in M_1$. Множество $M = \{v \in X;\ \|v - u\| \leqslant \varepsilon/2$ для некоторого $u \in M_1\}$ представляет собой выпуклую окрестность нуля в X, и для всех $v \in M$ выполняется условие $\|x_\infty - v\| > \varepsilon/2$. Обозначим

[1] То есть ограничена по норме: $\sup_n \|x_n\| < \infty$. — *Прим. перев.*

через $p(y)$ функционал Минковского множества M. Так как $x_\infty = \beta^{-1}u_0$, где $p(u_0)=1$ и $0<\beta<1$, то $p(x_\infty)=\beta^{-1}>1$. Рассмотрим вещественное линейное подпространство $X_1=\{x \in X;\ x=\gamma u_0, -\infty<\gamma<\infty\}$ и положим $f_1(x)=\gamma$ для $x=\gamma u_0 \in X_1$. Вещественный линейный функционал f_1 на X_1 удовлетворяет условию $f_1(x) \leqslant p(x)$ при $x \in X_1$. Поэтому, согласно теореме Хана — Банаха (гл. IV, § 1), существует вещественное линейное продолжение f функционала f_1, определенное на вещественном линейном нормированном пространстве X, такое, что $f(x) \leqslant p(x)$ на X. Функционал Минковского $p(x)$ непрерывен по x, так как M — окрестность нуля. Поэтому f представляет собой непрерывный вещественный линейный функционал, заданный на вещественном линейном нормированном пространстве X. Кроме того,

$$\sup_{x \in M_1} f(x) \leqslant \sup_{x \in M} f(x) \leqslant \sup_{x \in M} p(x) = 1 < \beta^{-1} = f\left(\beta^{-1}u_0\right) = f(x_\infty).$$

Поэтому, как нетрудно видеть, элемент x_∞ не может быть слабой предельной точкой множества M_1, а это противоречит предположению $x_\infty = w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Теорема 3. Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ элементов нормированного линейного пространства X слабо сходилась к некоторому элементу $x_\infty \in X$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия: (1°) $\sup\limits_n \|x_n\| < \infty$; (2°) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_\infty)$ для каждого f из некоторого сильно плотного подмножества D' пространства X'_s.

Доказательство. Ясно, что требуется доказать лишь достаточность. Для любого $g \in X'_s$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует элемент $f \in D'$, такой, что $\|g-f\| < \varepsilon$. Поэтому

$$|g(x_n)-g(x_\infty)| \leqslant |g(x_n)-f(x_n)| + |f(x_n)-f(x_\infty)| + \\ + |f(x_\infty)-g(x_\infty)| \leqslant \varepsilon\|x_n\| + |f(x_n)-f(x_\infty)| + \varepsilon\|x_\infty\|,$$

откуда $\varlimsup\limits_{n\to\infty} |g(x_n)-g(x_\infty)| \leqslant 2\varepsilon \sup\limits_{1 \leqslant n} \|x_n\|$. Это показывает, что $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_\infty)$.

Теорема 4. Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ слабо сходилась к некоторому элементу $x_\infty \in L^1(S, \mathfrak{B}, m)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\|x_n\|\}$ была ограничена и чтобы для любого множества $B \in \mathfrak{B}$ существовал конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_B x_n(s)\,m(ds)$.

Доказательство. Необходимость приведенных требований очевидна, так как характеристические функции $C_B(s)$ множеств $B \in \mathfrak{B}$ принадлежат $L^\infty(S, \mathfrak{B}, m) = L^1(S, \mathfrak{B}, m)'$.

Докажем достаточность. По теореме Витали — Хана — Сакса функция множества $\psi(B)=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_B x_n(s)\,m(ds)$ $(B\in\mathfrak{B})$ σ-аддитивна и m-абсолютно непрерывна. Поэтому, согласно теореме Лебега — Никодима, существует элемент $x_\infty\in L^1(S, \mathfrak{B}, m)$, такой, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_B x_n(s)\,m(ds)=\int\limits_B x_\infty(s)\,m(ds) \quad \text{для всех} \quad B\in\mathfrak{B}.$$

Следовательно, для всякого разбиения вида $S=\sum\limits_{j=1}^{k}B_j$ множества S, где $B_j\in\mathfrak{B}$, выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_S x_n(s)\,y(s)\,m(ds)=\int\limits_S x_\infty(s)\,y(s)\,m(ds),$$

где $y(s)$ — функция вида $y(s)=\sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j C_{B_j}(s)$. Такие функции $y(s)$ образуют сильно плотное подмножество пространства $L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)=$ $=L^1(S, \mathfrak{B}, m)'$, поэтому, согласно доказанной ранее теореме 3, условия теоремы 4 достаточны для слабой сходимости $\{x_n\}$ к элементу $x_\infty\in X$.

Теорема 5. Пусть в пространстве $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к элементу $x_\infty\in L^1(S, \mathfrak{B}, m)$. Эта последовательность сильно сходится к x_∞ тогда и только тогда, когда последовательность $\{x_n(s)\}$ сходится к $x_\infty(s)$ по m-мере на всяком $\mathfrak{B}$-измеримом множестве B, для которого $m(B)<\infty$.

Замечание. Говорят, что последовательность $\{x_n(s)\}$ сходится к $x_\infty(s)$ по m-мере на множестве B, если для всякого $\varepsilon>0$ m-мера множества $\{s\in B;\ |x_n(s)-x_\infty(s)|\geqslant\varepsilon\}$ стремится к нулю при $n\to\infty$ (см. предложение в гл. I, § 4). Пространство (l^1) представляет собой пример пространства вида $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$, в котором $S=\{1, 2, \ldots\}$ и $m(\{n\})=1$ для $n=1, 2, \ldots$. В этом случае $(l^1)'=(l^\infty)$, и слабая сходимость последовательности $\{x_n\}$ $(x_n=(\xi_1^{n}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_k^{(n)}, \ldots))$ к точке $x_\infty=(\xi_1^{(\infty)}, \xi_2^{(\infty)}, \ldots, \xi_k^{(\infty)}, \ldots)$ означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k^{(\infty)}$ $(k=1, 2, \ldots)$. Последнее нетрудно обнаружить, выбирая функционал $f\in(l^1)'$ так, что $f(x)=\langle x, f\rangle=\xi_k$ для $x=\{\xi_j\}\in(l^1)$. Значит, в данном частном случае последовательность $\{x_n\}$ действительно сходится к x_∞ по m-мере на каждом $\mathfrak{B}$-измеримом множестве B конечной m-меры. Мы получаем такое

Следствие (И. Шур). Если последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится в пространстве (l^1) к некоторому элементу $x_\infty\in(l^1)$, то $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_\infty$.

Доказательство теоремы 5. Необходимость условия теоремы очевидна, так как из сильной сходимости в пространстве $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$

следует сходимость по m-мере. Докажем достаточность. Последовательность $\{x_n - x_\infty\}$ слабо сходится к $x=0$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \int_B (x_n(s) - x_\infty(s))\, m(ds) = 0 \quad \text{для всякого} \quad B \in \mathfrak{B}. \tag{1}$$

Рассмотрим последовательность неотрицательных мер вида

$$\psi_n(B) = \int_B |x_n(s) - x_\infty(s)|\, m(ds), \quad B \in \mathfrak{B}.$$

Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \psi_n(B_k) = 0 \text{ равномерно по } n \text{ для всякой убывающей}$$
$$\text{последовательности } \{B_k\} \subseteq \mathfrak{B}, \text{ такой, что } \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \emptyset. \tag{2}$$

Действительно, в противном случае нашлось бы такое $\varepsilon > 0$, что каждому k соответствовало бы некоторое n_k, такое, что $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$ и $\psi_{n_k}(B_k) > \varepsilon$. Тогда либо

$$\int_{B_k} \left|\operatorname{Re}\left(x_{n_k}(s) - x_\infty(s)\right)\right| m(ds) > \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

либо

$$\int_{B_k} \left|\operatorname{Im}\left(x_{n_k}(s) - x_\infty(s)\right)\right| m(ds) > \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

и поэтому существуют множества $B'_k \subseteq B_k$, такие, что

$$\left| \int_{B'_k} \left(x_{n_k}(s) - x_\infty(s)\right) m(ds) \right| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Но это противоречит тому, что меры, образующие последовательность $\{\varphi_n(B)\}$, $\varphi_n(B) = \int\limits_B (x_n(s) - x_\infty(s))\, m(ds)$, согласно условию (1), m-абсолютно непрерывны равномерно относительно n (см. доказательство теоремы Витали — Хана — Сакса в гл. II, § 2).

Пусть теперь B_0 — произвольное множество семейства $\mathfrak{B}$ меры $m(B_0) < \infty$. Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(B_0) = 0. \tag{3}$$

Допустим, что существуют $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{\psi_{n'}\}$ из $\{\psi_n\}$, такие, что

$$\psi_{n'}(B_0) > \varepsilon \quad (n' = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Согласно условию теоремы, последовательность $\{(x_n(s) - x_\infty(s)\}$ сходится по m-мере к $x = 0$ на множестве B_0. Поэтому найдутся подпоследовательность $\{(x_{n''}(s) - x_\infty(s))\}$ последовательности $\{(x_{n'}(s) - x_\infty(s))\}$ и множества $B_n'' \subseteq B_0$, такие, что $m(B_n'') \leqslant 2^{-n}$ и $|x_{n''}(s) - x_\infty(s)| < \varepsilon / m(B_0)$ при $s \in (B_0 - B_n'')$. Положим $B_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} B_n''$. Тогда множества B_k образуют убывающую последовательность, такую, что

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} m(B_n'') \leqslant 2^{-k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

и поэтому $m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = 0$. Таким образом, используя следствие из теоремы Витали — Хана — Сакса, мы можем на основании условия (1) заключить, что $\lim_{k\to\infty} \psi_n(B_k) = 0$ равномерно по n. Значит,

$$\psi_{n''}(B_0) \leqslant \psi_{n''}(B_n'') + \varepsilon [m(B_0)]^{-1} \cdot m(B_0 - B_n'').$$

Но при $n \to \infty$ правая часть этого неравенства имеет предел, не превосходящий ε, что противоречит условию (4). Полученное противоречие доказывает (3).

Возьмем теперь последовательность $\{B_k'\}$ множеств $B_k' \subseteq \mathfrak{B}$, такую, что $m(B_k') < \infty$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k'$. Тогда

$$\int_S |x_n(s) - x_\infty(s)| m(ds) = \int_{\bigcup_{k=1}^{t} B_k'} + \int_{S - \bigcup_{k=1}^{t} B_k'} .$$

Первое слагаемое в правой части, согласно (3), стремится к нулю при $n \to \infty$ и всяком фиксированном t. Второй интеграл стремится к нулю при $t \to \infty$ равномерно по n (это вытекает из (2)). Тем самым мы доказали, что $s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty$ в пространстве $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$.

В следующей теореме рассматривается аналогичная ситуация для пространства $\mathfrak{D}(\Omega)'$.

Теорема 6. Рассмотрим последовательность $\{T_n\}$ обобщенных функций, принадлежащих пространству $\mathfrak{D}(\Omega)'$. Если $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ в слабой* топологии пространства $\mathfrak{D}(\Omega)'$, то $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ и в сильной топологии пространства $\mathfrak{D}(\Omega)'$.

Доказательство. Сильная топология пространства $\mathfrak{D}(\Omega)'$ определяется (см. определение 1, гл. IV, § 7) семейством полунорм вида

$$p_B(T) = \sup_{\varphi \in \mathfrak{B}} |T(\varphi)|,$$

где $\mathfrak{B}$ — любое ограниченное множество в $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Слабая* топология пространства $\mathfrak{D}(\Omega)'$ определяется семейством полунорм вида

$$p_F(T) = \sup_{\varphi \in \mathfrak{F}} |T(\varphi)|, \quad \text{где } \mathfrak{F} \text{ — любое конечное множество в } \mathfrak{D}(\Omega).$$

Таким образом, предел $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$ в слабой* топологии пространства $\mathfrak{D}(\Omega)'$ — это в точности то же самое, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T(\mathfrak{D}(\Omega)')$, определенный в гл. II, § 3.

Пусть теперь $\mathfrak{B}$ — произвольное ограниченное множество в $\mathfrak{D}(\Omega)$. Тогда в области Ω найдется бикомпактное множество K, такое, что $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K$ для любого элемента $\varphi \in \mathfrak{B}$ и $\sup\limits_{x \in K,\, \varphi \in \mathfrak{B}} |D^j\varphi(x)| < \infty$ для всякого дифференциального оператора D^j (теорема 1, гл. I, § 8). Поэтому, согласно теореме Асколи — Арцела, множество $\mathfrak{B}$ бикомпактно в $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. Применяя к последовательности $\{T_n - T\}$ теорему о равномерной ограниченности, мы обнаруживаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U нуля пространства $\mathfrak{D}_K(\Omega)$, такая, что

$$\sup_{n;\, \varphi \in U} |(T_n - T)(\varphi)| < \varepsilon.$$

Бикомпактное подмножество $\mathfrak{B}$ пространства $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ можно покрыть конечной системой множеств вида $\varphi_i + U$, где $\varphi_i \in \mathfrak{B}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Следовательно,

$$|(T_n - T)(\varphi_i + u)| \leqslant |(T_n - T)(\varphi_i)| + |(T_n - T)(u)| \leqslant$$
$$\leqslant |(T_n - T)(\varphi_i)| + \varepsilon \quad \text{для всех} \quad u \in U.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} (T_n - T)(\varphi_i) = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, k$, то

$$\lim_{n\to\infty} (T_n - T)(\varphi) = 0$$

равномерно относительно $\varphi \in \mathfrak{B}$. Это и доказывает нашу теорему.

Теорема 7. Всякое рефлексивное B-пространство X слабо секвенциально полно.

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства X слабо сходится. Каждая точка x_n определяет с помощью формулы $X_n(x') = \langle x_n, x' \rangle$ на пространстве X'_s непрерывный линейный функционал X_n. Поскольку X'_s есть B-пространство (теорема 1, гл. IV, § 8), мы можем применить теорему о резонансе. Поэтому конечный предел $\lim_{n\to\infty} X_n(x')$ (который существует согласно условию теоремы) определяет на пространстве X'_s некоторый непрерывный линейный функционал. Так как пространство X рефлексивно, существует такой элемент $x_\infty \in X$, что $\langle x_\infty, x'\rangle = \lim_{n\to\infty} X_n(x') = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, x'\rangle$, а это означает, что $x_\infty = w\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$.

Теорема 8. Пусть X — гильбертово пространство. Если последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства X слабо сходится к $x_\infty \in X$, то $s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty$ тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x_\infty\|$.

Доказательство. Необходимость следует из непрерывности нормы. Достаточность вытекает из равенства

$$\|x_n - x_\infty\|^2 = (x_n - x_\infty, x_n - x_\infty) = \\ = \|x_n\|^2 - (x_n, x_\infty) - (x_\infty, x_n) + \|x_\infty\|^2.$$

Действительно, при $n\to\infty$ предел правой части равен $\|x_\infty\|^2 - \|x_\infty\|^2 - \|x_\infty\|^2 + \|x_\infty\|^2 = 0$.

Слабая* сходимость

Определение 2. Последовательность элементов $\{f_n\}$ пространства X'_s, сопряженного нормированному линейному пространству X, называется *слабо* сходящейся*, если для каждой точки $x \in X$ существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Говорят, что последовательность $\{f_n\}$ *слабо* сходится к элементу* $f_\infty \in X'_s$, если $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_\infty(x)$ для всех $x \in X$. В последнем случае мы будем писать $w^*\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n = f_\infty$ или „$f_n \to f_\infty$ *слабо**".

Теорема 9. (1°) Если $s\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n = f_\infty$, то $w^*\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n = f_\infty$; обратное, вообще говоря, неверно. (2°) Если X есть B-пространство, то всякая слабо* сходящаяся последовательность $\{f_n\} \subseteq X'_s$ слабо* сходится к некоторому элементу $f_\infty \in X'_s$ и $\|f_\infty\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|f_n\|$.

Доказательство. (1°) Первая часть этого утверждения следует из того, что $|f_n(x) - f_\infty(x)| \leqslant \|f_n - f_\infty\| \cdot \|x\|$. Тот факт, что обратное утверждение в общем случае неверно, обнаруживается на примере, приведенном в доказательстве теоремы 1.

(2°) Согласно теореме о резонансе, $f_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ есть непрерывный линейный функционал на X и $\|f_\infty\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|f_n\|$.

Теорема 10. Если X есть B-пространство, то последовательность $\{f_n\} \subseteq X'_s$ слабо* сходится к некоторому элементу $f_\infty \in X'_s$

тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия: (1°) последовательность $\{\|f_n\|\}$ ограничена; (2°) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f_\infty(x)$ на всяком сильно плотном подмножестве в X.

Доказательство. Теорема доказывается аналогично теореме 3.

Сильное и слабое замыкания

Теорема 11. Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство, M — его замкнутое линейное подпространство. Тогда множество M замкнуто в слабой топологии пространства X.

Доказательство. Если это не так, то существует некоторая точка $x_0 \in X - M$, являющаяся предельной точкой множества M в слабой топологии пространства X. Но тогда, согласно следствию теоремы 3 из гл. IV, § 6, найдется такой непрерывный линейный функционал f_0 на X, что $f_0(x_0) = 1$ и $f_0(x) = 0$ при $x \in M$. Поэтому x_0 не может быть предельной точкой множества M в слабой топологии пространства X.

2. Слабая компактность в рефлексивных B-пространствах[1]*. Равномерная выпуклость*

Теорема 1. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная по норме последовательность элементов рефлексивного B-пространства X. Тогда из $\{x_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{x_{n'}\}$, слабо сходящуюся к некоторой точке пространства X[2].

Мы докажем эту теорему в предположении, что пространство X сепарабельно, поскольку в конкретных приложениях этой теоремы обычно приходится иметь дело с сепарабельными функциональными пространствами. Общий случай несепарабельного пространства будет рассмотрен в приложении.

Лемма. Если сильное сопряженное пространство X'_s нормированного линейного пространства X сепарабельно, то и пространство X сепарабельно.

---

[1]) Множество A топологического пространства X называется *компактным*, если любая его сеть (обобщенная последовательность) содержит подсеть, сходящуюся к некоторому $x \in A$. Если это относится только к обычным последовательностям, то множество называют *„секвенциально компактным"*. Если каждая сеть содержит подсеть, сходящуюся к некоторому $x \in X$, не обязательно принадлежащему A, то множество A называют *относительно компактным*. В зависимости от рассматриваемой топологии говорят о *сильной*, *слабой* и т. п. компактности. В метрических пространствах понятия компактности и секвенциальной компактности совпадают. Отметим, что в метрическом пространстве для бикомпактности множества необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым и относительно компактным. — *Прим. перев.*

[2]) Здесь, таким образом, говорится о слабой относительной секвенциальной компактности ограниченных по норме множеств рефлексивного B-пространства. — *Прим. перев.*