тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия: (1°) последовательность $\{\|f_n\|\}$ ограничена; (2°) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_\infty(x)$ на всяком сильно плотном подмножестве в X.

Доказательство. Теорема доказывается аналогично теореме 3.

Сильное и слабое замыкания

Теорема 11. Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство, M — его замкнутое линейное подпространство. Тогда множество M замкнуто в слабой топологии пространства X.

Доказательство. Если это не так, то существует некоторая точка $x_0 \in X - M$, являющаяся предельной точкой множества M в слабой топологии пространства X. Но тогда, согласно следствию теоремы 3 из гл. IV, § 6, найдется такой непрерывный линейный функционал f_0 на X, что $f_0(x_0) = 1$ и $f_0(x) = 0$ при $x \in M$. Поэтому x_0 не может быть предельной точкой множества M в слабой топологии пространства X.

2. Слабая компактность в рефлексивных B-пространствах[1]*. Равномерная выпуклость*

Теорема 1. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная по норме последовательность элементов рефлексивного B-пространства X. Тогда из $\{x_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{x_{n'}\}$, слабо сходящуюся к некоторой точке пространства X[2].

Мы докажем эту теорему в предположении, что пространство X сепарабельно, поскольку в конкретных приложениях этой теоремы обычно приходится иметь дело с сепарабельными функциональными пространствами. Общий случай несепарабельного пространства будет рассмотрен в приложении.

Лемма. Если сильное сопряженное пространство X'_s нормированного линейного пространства X сепарабельно, то и пространство X сепарабельно.

---

[1]) Множество A топологического пространства X называется *компактным*, если любая его сеть (обобщенная последовательность) содержит подсеть, сходящуюся к некоторому $x \in A$. Если это относится только к обычным последовательностям, то множество называют „*секвенциально компактным*“. Если каждая сеть содержит подсеть, сходящуюся к некоторому $x \in X$, не обязательно принадлежащему A, то множество A называют *относительно компактным*. В зависимости от рассматриваемой топологии говорят о *сильной*, *слабой* и т. п. компактности. В метрических пространствах понятия компактности и секвенциальной компактности совпадают. Отметим, что в метрическом пространстве для бикомпактности множества необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым и относительно компактным. — *Прим. перев.*

[2]) Здесь, таким образом, говорится о слабой относительной секвенциальной компактности ограниченных по норме множеств рефлексивного B-пространства. — *Прим. перев.*

Доказательство. Пусть $\{x_n'\}$ — счетная последовательность, сильно плотная на поверхности единичной сферы $\{x' \in X_s';\ \|x'\| = 1\}$ пространства X_s'. Выберем точки $x_n \in X$ так, что $\|x_n\| = 1$ и $|\langle x_n, x_n'\rangle| \geqslant \frac{1}{2}$. Обозначим через M замкнутое линейное подпространство пространства X, натянутое на точки последовательности $\{x_n\}$. Предположим, что $M \neq X$, и возьмем некоторый элемент $x_0 \in X - M$. Согласно следствию теоремы 3 (теоремы Мазура), гл. IV, § 6, существует такой элемент $x_0' \in X_s'$, что $\|x_0'\| = 1$, $\langle x_0, x_0'\rangle \neq 0$ и $\langle x, x_0'\rangle = 0$ для всех $x \in M$. Поэтому $\langle x_n, x_0'\rangle = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и, следовательно, $1/2 \leqslant |\langle x_n, x_n'\rangle| \leqslant |\langle x_n, x_n'\rangle - \langle x_n, x_0'\rangle| + |\langle x_n, x_0'\rangle|$, откуда $1/2 \leqslant \|x_n\| \cdot \|x_n' - x_0'\| = \|x_n' - x_0'\|$. Но это противоречит тому, что последовательность $\{x_n'\}$ сильно плотна на поверхности единичной сферы пространства X_s'. Отсюда вытекает, что $M = X$, и, стало быть, линейные комбинации элементов последовательности $\{x_n\}$ с рациональными коэффициентами образуют плотное множество в X. Это и доказывает лемму.

Доказательство теоремы 1. Мы уже говорили, что пространство X предполагается сепарабельным, а потому и пространство $(X_s')_s' = X$ сепарабельно. Но тогда по предыдущей лемме пространство X_s' тоже сепарабельно. Выберем счетную последовательность $\{x_n'\}$, сильно плотную в пространстве X_s'. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена по норме, поэтому последовательность $\{\langle x_n, x_1'\rangle\}$ ограничена. Следовательно, можно выбрать подпоследовательность $\{x_{n_1}\} \subseteq \{x_n\}$ так, чтобы последовательность $\{x_{n_1}, x_1'\}$ сходилась. Последовательность $\{\langle x_{n_1}, x_2'\rangle\}$ тоже ограничена, и поэтому существует подпоследовательность $\{x_{n_2}\} \subseteq \{x_{n_1}\}$, такая, что сходится последовательность $\{\langle x_{n_2}, x_2'\rangle\}$. Продолжая такое построение, мы придем к последовательности $\{x_{n_{i+1}}\} \subseteq \subseteq \{x_{n_i}\}$, для которой числовая последовательность $\{\langle x_{n_{i+1}}, x_j'\rangle\}$ сходится при значениях $j = 1, 2, \ldots, i+1$. Следовательно, диагональная подпоследовательность $\{x_{n_n}\}$ первоначальной последовательности $\{x_n\}$ обладает тем свойством, что для нее сходятся числовые последовательности $\{\langle x_{n_n}, x_j'\rangle\}$ при $j = 1, 2, \ldots$. Поэтому, согласно теореме 3 предыдущего параграфа, для всякого $x' \in X'$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_{n_n}, x'\rangle$[1]. Но тогда по теореме 7 предыдущего параграфа существует и принадлежащий пространству X предел $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_n}$.

[1]) Ссылка на теорему 3, гл. V, § 1, здесь не вполне точна. Применяя метод, аналогичный использованному при доказательстве упомянутой теоремы, мы можем следующим образом показать, что конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_{n_n}, x'\rangle$

Теорема Мильмана

Д. П. Мильман показал, что B-пространство рефлексивно, если оно *равномерно выпукло*, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из условий $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$ и $\|x - y\| \geqslant \varepsilon$ $(x, y \in X)$ следует неравенство $\|x + y\| \leqslant 2(1 - \delta)$. Всякое предгильбертово пространство равномерно выпукло, как видно из формулы

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Известно, что пространства L^p и (l^p) равномерно выпуклы при $1 < p < \infty$ (см. Кларксон [1]).

Теорема 2 (Мильман [1]). Всякое равномерно выпуклое B-пространство X рефлексивно.

Доказательство (принадлежащее Какутани). Выберем некоторый элемент $x_0'' \in (X_s')_s'$, такой, что $\|x_0''\| = 1$. Тогда найдется последовательность $\{f_n\} \subseteq X_s'$, такая, что $\|f_n\| = 1$, $x_0''(f_n) \geqslant 1 - n^{-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. По теореме 5, гл. IV, § 6, для любого n существует такой элемент $x_n \in X$, что

$$f_i(x_n) = x_0''(f_i)\,(i = 1, 2, \ldots, n) \text{ и } \|x_n\| \leqslant \|x_0''\| + n^{-1} = 1 + n^{-1}.$$

Поскольку

$$1 - n^{-1} \leqslant x_0''(f_n) = f_n(x_n) \leqslant \|f_n\| \cdot \|x_n\| = \|x_n\| \leqslant 1 + n^{-1},$$

мы имеем $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n\| = 1$.

Если допустить, что последовательность $\{x_n\}$ не сходится сильно, то найдутся такое $\varepsilon > 0$ и такие номера $n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \ldots$ $\ldots < n_k < m_k < \ldots$, что $\varepsilon \leqslant \|x_{n_k} - x_{m_k}\|$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Отсюда, учитывая, что пространство X равномерно выпукло и $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n\| = 1$. мы заключаем, что $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \|x_{n_k} + x_{m_k}\| \leqslant 2(1 - \delta(\varepsilon)) < 2$. Но $n_k < m_k$,

---

существует при любом $x' \in X'$:

$$|\langle x_n, x'\rangle - \langle x_m, x'\rangle| \leqslant |\langle x_n, x'\rangle - \langle x_n, x_j'\rangle| + |\langle x_n, x_j'\rangle - \langle x_m, x_j'\rangle| + |\langle x_m, x_j'\rangle - \langle x_m, x'\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \|x' - x_j'\| \cdot \|x_n\| + |\langle x_n, x_j'\rangle - \langle x_m, x_j'\rangle| + \|x_j' - x'\| \cdot \|x_m\|.$$

Первое и последнее слагаемые можно сделать сколь угодно малыми, выбирая из $\{x_n'\}$ элемент x_j', достаточно близкий по норме к x' (это возможно в силу плотности $\{x_n'\}$ и ограниченности норм $\|x_n\|$), а второе слагаемое стремится к нулю при $n, m \to \infty$. Таким образом, последовательность $\{\langle x_n, x'\rangle\}$ фундаментальна при всяком $x' \in X'$ и имеет поэтому конечный предел. — *Прим. перев.*

поэтому $f_{n_k}(x_{n_k})=f_{n_k}(x_{m_k})=x_0''(f_{n_k})$ и, следовательно,

$$2(1-n_k^{-1})\leqslant 2x_0''(f_{n_k})=f_{n_k}(x_{n_k}+x_{m_k})\leqslant \|f_{n_k}\|\cdot\|x_{n_k}+x_{m_k}\|.$$

Ввиду того что $\|f_{n_k}\|=1$, мы получаем неравенство

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\|x_{n_k}+x_{m_k}\|\geqslant 2,$$

что противоречит предыдущему неравенству $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\|x_{n_k}+x_{m_k}\|<2$.

Мы доказали, таким образом, что предел $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ существует и при этом

$$\|x_0\|=1,\quad f_i(x_0)=x_0''(f_i)\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots). \tag{1}$$

Покажем теперь, что решение уравнения (1) единственно. В самом деле, если существует элемент $\hat{x}_0\neq x_0$, удовлетворяющий уравнению (1), то из равномерной выпуклости пространства X следует, что $\|\hat{x}_0+x_0\|<2$. Кроме того, $f_i(\hat{x}_0+x_0)=2x_0''(f_i)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots)$. Поэтому

$$2(1-i^{-1})\leqslant 2x_0''(f_i)=f_i(\hat{x}_0+x_0)\leqslant\|f_i\|\cdot\|\hat{x}_0+x_0\|=\|\hat{x}_0+x_0\|,$$

откуда $\|\hat{x}_0+x_0\|\geqslant\lim\limits_{i\to\infty}2(1-i^{-1})=2$, что противоречит неравенству $\|\hat{x}_0+x_0\|<2$.

Наконец, пусть f_0 — произвольная точка пространства X_s'. Если мы убедимся в том, что $f_0(x_0)=x_0''(f_0)$, то отсюда будет следовать, что $(X_s')_s'\subseteq X$, и тем самым рефлексивность пространства X будет доказана. Чтобы показать, что $f_0(x_0)=x_0''(f_0)$, возьмем вместо последовательности $f_1,f_2,\ldots,f_n,\ldots$ последовательность $f_0,f_1,\ldots,f_n,\ldots$ и повторим построение, проведенное выше. Это даст нам элемент $\hat{x}_0\in X$, такой, что

$$\|\hat{x}_0\|=1,\quad f_i(\hat{x}_0)=x_0''(f_i)\qquad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n,\ \ldots).$$

Но тогда, как показывают предыдущие рассуждения, $\hat{x}_0=x_0$, и это завершает доказательство теоремы.

3. Теорема Данфорда и теорема Гельфанда — Мазура

Определение 1. Пусть Z — открытая область комплексной плоскости. Отображение $x(\zeta)$, определенное в области Z, со значениями в некотором B-пространстве X называется *слабо голоморфным* по ζ в области Z, если для каждого элемента $f\in X'$ числовая функция

$$f(x(\zeta))=\langle x(\zeta),\ f\rangle$$

переменной ζ голоморфна в Z.