поэтому $f_{n_k}(x_{n_k}) = f_{n_k}(x_{m_k}) = x_0''(f_{n_k})$ и, следовательно,

$$2(1 - n_k^{-1}) \leqslant 2x_0''(f_{n_k}) = f_{n_k}(x_{n_k} + x_{m_k}) \leqslant \| f_{n_k} \| \cdot \| x_{n_k} + x_{m_k} \|.$$

Ввиду того что $\| f_{n_k} \| = 1$, мы получаем неравенство

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \| x_{n_k} + x_{m_k} \| \geqslant 2,$$

что противоречит предыдущему неравенству $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \| x_{n_k} + x_{m_k} \| < 2$.

Мы доказали, таким образом, что предел $s\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ существует и при этом

$$\| x_0 \| = 1, \quad f_i(x_0) = x_0''(f_i) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{1}$$

Покажем теперь, что решение уравнения (1) единственно. В самом деле, если существует элемент $\hat{x}_0 \neq x_0$, удовлетворяющий уравнению (1), то из равномерной выпуклости пространства X следует, что $\| \hat{x}_0 + x_0 \| < 2$. Кроме того, $f_i(\hat{x}_0 + x_0) = 2x_0''(f_i)$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots)$. Поэтому

$$2(1 - i^{-1}) \leqslant 2x_0''(f_i) = f_i(\hat{x}_0 + x_0) \leqslant \| f_i \| \cdot \| \hat{x}_0 + x_0 \| = \| \hat{x}_0 + x_0 \|,$$

откуда $\| \hat{x}_0 + x_0 \| \geqslant \lim\limits_{i \to \infty} 2(1 - i^{-1}) = 2$, что противоречит неравенству $\| \hat{x}_0 + x_0 \| < 2$.

Наконец, пусть f_0 — произвольная точка пространства X_s'. Если мы убедимся в том, что $f_0(x_0) = x_0''(f_0)$, то отсюда будет следовать, что $(X_s')_s' \subseteq X$, и тем самым рефлексивность пространства X будет доказана. Чтобы показать, что $f_0(x_0) = x_0''(f_0)$, возьмем вместо последовательности $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ последовательность $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ и повторим построение, проведенное выше. Это даст нам элемент $\hat{x}_0 \in X$, такой, что

$$\| \hat{x}_0 \| = 1, \quad f_i(\hat{x}_0) = x_0''(f_i) \qquad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,\ \ldots).$$

Но тогда, как показывают предыдущие рассуждения, $\hat{x}_0 = x_0$, и это завершает доказательство теоремы.

3. Теорема Данфорда и теорема Гельфанда — Мазура

Определение 1. Пусть Z — открытая область комплексной плоскости. Отображение $x(\zeta)$, определенное в области Z, со значениями в некотором B-пространстве X называется *слабо голоморфным* по ζ в области Z, если для каждого элемента $f \in X'$ числовая функция

$$f(x(\zeta)) = \langle x(\zeta),\ f \rangle$$

переменной ζ голоморфна в Z.

Теорема 1 (Данфорд [2]). Если функция $x(\zeta)$ слабо голоморфна в области Z, то существует отображение $x'(\zeta)$, определенное в области Z и принимающее значения из X, такое, что для всякой точки $\zeta_0 \in Z$

$$s\text{-}\lim_{h\to\infty} h^{-1}(x(\zeta_0+h)-x(\zeta_0))=x'(\zeta_0).$$

Иными словами, слабая голоморфность влечет за собой *сильную голоморфность*.

Доказательство. Пусть C — произвольная спрямляемая жорданова дуга, ограничивающая замкнутую ограниченную область $\overline{C}$, целиком лежащую в области Z. Пусть $\zeta_0 \in \overline{C}-C$. Обозначим через Z_0 произвольную открытую область, содержащую ζ_0, замыкание которой лежит во внутренности области $\overline{C}$. По теореме об интегральном представлении голоморфной функции

$$f(x(\zeta_0))=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(x(\zeta))}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta.$$

Поэтому если две несовпадающие точки ζ_0+h и ζ_0+g принадлежат области Z_0, то

$$(h-g)^{-1}\left\{\frac{f(x(\zeta_0+h))-f(x(\zeta_0))}{h}-\frac{f(x(\zeta_0+g))-f(x(\zeta_0))}{g}\right\}=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(x(\zeta))\left\{\frac{1}{(\zeta-\zeta_0-h)(\zeta-\zeta_0-g)(\zeta-\zeta_0)}\right\}d\zeta.$$

По предположению расстояние от области Z_0 до кривой C положительно. Следовательно, для любого фиксированного элемента $f \in X'$ абсолютная величина правой части последнего равенства равномерно ограничена, когда точки ζ_0, ζ_0+h и ζ_0+g пробегают область Z_0. Отсюда по теореме о резонансе

$$\sup_{\zeta_0,\ \zeta_0+h,\ \zeta_0+g\in Z_0}\frac{1}{|h-g|}\left\|\left\{\frac{x(\zeta_0+h)-x(\zeta_0)}{h}-\frac{x(\zeta_0+g)-x(\zeta_0)}{g}\right\}\right\|<\infty.$$

Ввиду полноты пространства X функция $x(\zeta)$ оказывается сильно голоморфной в каждой точке $\zeta_0 \in Z$.

Следствие 1 (обобщение интегральной теоремы Коши). Из сильной голоморфности функции $x(\zeta)$ следует ее сильная непрерывность. Поэтому можно естественным образом определить криволинейный интеграл $\int_C x(\zeta)\,d\zeta$ со значением из X. Можно показать, что $\int_C x(\zeta)\,d\zeta=0$ для замкнутой кривой C (0 — нулевой вектор пространства X).

Доказательство. Так как всякий функционал $f \in X'$ линеен и непрерывен, имеем

$$f\left(\int\limits_C x(\zeta)\,d\zeta\right) = \int\limits_C f(x(\zeta))\,d\zeta.$$

Правая часть равна нулю согласно интегральной теореме Коши. Так как элемент $f \in X'$ выбирается произвольно, то в силу следствия 2 теоремы 1, гл. IV, § 6, $\int\limits_C x(\zeta)\,d\zeta = 0$, что и требовалось доказать.

Из приведенного утверждения можно вывести ряд следствий, аналогичных известным теоремам теории функций комплексного переменного.

Следствие 2 (обобщение интегральной формулы Коши). Для всякой внутренней точки ζ_0 области $\bar{C}$

$$x(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{x(\zeta)}{\zeta - \zeta_0}\,d\zeta.$$

Следствие 3 (разложение Тейлора). Для всякой внутренней точки ζ_0 замкнутой области $\bar{C}$ ряд Тейлора функции $x(\zeta)$ в окрестности точки $\zeta = \zeta_0$ сильно сходится внутри круга с центром в точке ζ_0, целиком лежащего в области $\bar{C}$:

$$x(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} (\zeta - \zeta_0)^n\, x^{(n)}(\zeta_0),$$

где

$$x^{(n)}(\zeta_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{x(\zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^{n+1}}\,d\zeta.$$

Следствие 4 (обобщение теоремы Лиувилля). Если функция $x(\zeta)$ сильно голоморфна на всей комплексной плоскости $|\zeta| < \infty$ и $\sup\limits_{|\zeta|<\infty} \|x(\zeta)\| < \infty$, то $x(\zeta)$ представляет собой постоянный вектор $x(0)$.

Доказательство. Взяв в качестве кривой C окружность $|\zeta| = r$, мы при $r \to \infty$ получаем

$$\|x^{(n)}(0)\| = \frac{n!}{2\pi} \sup_{|\zeta|<\infty} \|x(\zeta)\| \int\limits_C \frac{|d\zeta|}{r^{n+1}} \to 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому тейлоровское разложение $x(\zeta)$ в окрестности точки $\zeta = 0$ сводится к единственному постоянному члену $x(0)$.

Следствие 4 мы используем далее для доказательства теоремы Гельфанда — Мазура.

Определение 2. Коммутативное поле X над полем комплексных чисел называется *нормированным полем*, если оно является B-пространством и при этом выполняются следующие условия:

$$\|e\| = 1, \text{ где } e — \textit{единица} \text{ умножения в поле } X, \\ \|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|, \text{ где } xy — \text{умножение в поле } X. \tag{1}$$

Теорема 2 (Гельфанд [2] — Мазур [1]). Всякое нормированное поле X изометрически изоморфно полю комплексных чисел, т. е. любой элемент x поля X имеет вид $x = \xi e$, где ξ — комплексное число.

Доказательство. Допустим противное: существует такой элемент $x \in X$, что $(x - \xi e) \neq 0$ для всех комплексных чисел ξ. Так как X — поле, ненулевой элемент $(x - \xi e)$ имеет обратный $(x - \xi e)^{-1} \in X$.

Покажем, что функция $(x - \lambda e)^{-1}$ сильно голоморфна по λ в области $|\lambda| < \infty$. В самом деле,

$$\begin{aligned} h^{-1}\left((x-(\lambda+h)e)^{-1} - (x-\lambda e)^{-1}\right) &= \\ = h^{-1}(x-(\lambda+h)e)^{-1}\left\{e - (x-(\lambda+h)e)(x-\lambda e)^{-1}\right\} &= \\ = h^{-1}(x-(\lambda+h)e)^{-1}\left\{e - e + h(x-\lambda e)^{-1}\right\} &= \\ = (x-(\lambda+h)e)^{-1}(x-\lambda e)^{-1}. \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу условий (1) ряд $y^{-1}\left(e + \sum_{n=1}^{\infty}(hy^{-1})^n\right)$, где $y = (x - \lambda e)$, сходится при достаточно малых значениях $|h|$. Умножая этот ряд на $(y - he)$, мы видим, что он определяет обратный к $(y - he)$ элемент $(y - he)^{-1} = y^{-1}(e - hy^{-1})^{-1}$. Поскольку сумма этого ряда сильно непрерывна по h, функция $(x - \lambda e)^{-1}$ сильно голоморфна по λ и ее производная[1]) равна $(x - \lambda e)^{-2}$

Далее, если $|\lambda| \geqslant 2\|x\|$, то, как и выше,

$$(x - \lambda e)^{-1} = -\lambda^{-1}(e - \lambda^{-1}x)^{-1} = -\lambda^{-1}\left(e + \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda^{-1}x)^n\right),$$

откуда

$$\|(x - \lambda e)^{-1}\| \leqslant |\lambda|^{-1}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(1/2)^n\right) \to 0 \quad \text{при} \quad |\lambda| \to \infty.$$

Кроме того, функция $(x - \lambda e)^{-1}$, будучи непрерывной по λ, ограничена в бикомпактной области $|\lambda| \leqslant 2\|x\|$ комплексной плоскости λ. Тогда, согласно теореме Лиувилля, $(x - \lambda e)^{-1}$ обращается в постоянный вектор $x^{-1} = (x - 0 \cdot e)^{-1}$. Но, как показано выше, $s\text{-}\lim\limits_{|\lambda| \to \infty}(x - \lambda e)^{-1} = 0$, поэтому $x^{-1} = 0$, откуда $e = x^{-1}x = 0$, что невозможно.

---

[1]) Под производной здесь понимается функция типа $x'(\zeta_0)$, фигурирующая в формулировке теоремы 1. — *Прим. перев.*