4. Слабая и сильная измеримость. Теорема Петтиса

Определение 1. Пусть $(S, \mathfrak{B}, m)$ — пространство с мерой и $x(s)$ — отображение, определенное на S, со значениями из B-пространства X. Отображение $x(s)$ называется *слабо $\mathfrak{B}$-измеримым*, если для любого элемента $f \in X'$ числовая функция $f(x(s)) = \langle x(s), f \rangle$ переменной s $\mathfrak{B}$-измерима. Отображение $x(s)$ называется *простым*, если оно принимает постоянные отличные от нуля значения на каждом из множеств B_j, образующих конечную систему непересекающихся $\mathfrak{B}$-измеримых множеств, причем $m(B_j) < \infty$, и $x(s) = 0$ при $s \in S - \bigcup_j B_j$. Отображение $x(s)$ называется *сильно $\mathfrak{B}$-измеримым*, если существует последовательность $\{x_n(s)\}$ простых отображений, сильно сходящаяся $x(s)$ m-п. в. на S.

Определение 2. Функция (отображение) $x(s)$ называется *сепарабельнозначной*, если область ее значений $\{x(s);\ s \in S\}$ сепарабельна. Она называется *m-почти сепарабельнозначной*, если существует $\mathfrak{B}$-измеримое множество B_0 m-меры нуль, такое, что множество $\{x(s);\ s \in S - B_0\}$ сепарабельно.

Теорема (Петтис [1]). Для того чтобы функция $x(s)$ была сильно $\mathfrak{B}$-измеримой, необходимо и достаточно, чтобы она была слабо $\mathfrak{B}$-измеримой и m-почти сепарабельнозначной.

Доказательство. Необходимость этого условия доказывается следующим образом. Всякое сильно $\mathfrak{B}$-измеримое отображение является и слабо $\mathfrak{B}$-измеримым, так как простые функции слабо $\mathfrak{B}$-измеримы и в силу сильной $\mathfrak{B}$-измеримости $x(s)$ существует последовательность простых функций $\{x_n(s)\}$, такая, что $s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n(s) = x(s)$ для всех s, за исключением некоторого множества $B_0 \in \mathfrak{B}$ m-меры нуль. Объединение областей значений функций $x_n(s)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ счетно, а замыкание этого множества сепарабельно и содержит область значений $\{x(s);\ s \in S - B_0\}$.

Докажем теперь достаточность. Не ограничивая общности, можно допустить, что сама область значений $\{x(s);\ s \in S\}$ сепарабельна. Поэтому можно считать пространство X сепарабельным: если это не так, то вместо X можно рассматривать наименьшее замкнутое линейное подпространство, содержащее область значений функции $x(s)$. Покажем сначала, что числовая функция $\|x(s)\|$ $\mathfrak{B}$-измерима. Для этого мы используем лемму, которая будет доказана ниже. Эта лемма утверждает, что пространство X', сопряженное сепарабельному B-пространству, удовлетворяет следующему условию:

> существует последовательность $\{f_n\} \subseteq X'$, $\|f_n\| \leqslant 1$, такая, что для всякого элемента $f_0 \in X'$, $\|f_0\| \leqslant 1$, можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n'}\} \subseteq \{f_n\}$, обладающую тем свойством, что (1)
>
> $$\lim_{n'\to\infty} f_{n'}(x) = f_0(x) \text{ для всех } x \in X.$$

Рассмотрим множества

$$A=\{s;\ \|x(s)\|\leqslant a\} \quad \text{и} \quad A_f=\{s;\ |f(x(s))|\leqslant a\},$$

где a — произвольное вещественное число и $f\in X'$. Если мы сможем показать, что $A=\bigcap_{j=1}^{\infty}A_{f_j}$, то в силу слабой $\mathfrak{B}$-измеримости $x(s)$ функция $\|x(s)\|$ будет $\mathfrak{B}$-измеримой.

Очевидно, что $A\subseteq\bigcap_{\|f\|\leqslant 1}A_f$. Но, согласно следствию 2 теоремы 1, гл. IV, § 6, для всякого фиксированного значения s существует элемент $f_0\in X'_s$, такой, что $\|f_0\|=1$ и $f_0(x(s))=\|x(s)\|$. Поэтому имеет место и обратное включение $A\supseteq\bigcap_{\|f\|\leqslant 1}A_f$, т. е. $A=\bigcap_{\|f\|\leqslant 1}A_f$. Согласно лемме, мы имеем $\bigcap_{\|f\|\leqslant 1}A_f=\bigcap_{j=1}^{\infty}A_{f_j}$, и поэтому $A=\bigcap_{j=1}^{\infty}A_{f_j}$.

Поскольку область значений $\{x(s);\ s\in S\}$ сепарабельна, эту область для любого целого положительного n можно покрыть счетной системой открытых шаров $S_{j,n}$ $(j=1, 2, \ldots)$ радиуса $\leqslant 1/n$. Пусть центры сфер $S_{j,n}$ находятся в точках $x_{j,n}$. Как показано выше, функция $\|x(s)-x_{j,n}\|$ $\mathfrak{B}$-измерима как функция переменной s. Следовательно, множества $B_{j,n}=\{s\in S;\ x(s)\in S_{j,n}\}$ $\mathfrak{B}$-измеримы и $S=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_{j,n}$. Определим функции $x_n(s)$, полагая

$$x_n(s)=x_{i,n}, \quad \text{когда} \quad s\in B'_{i,n}\equiv B_{i,n}-\bigcup_{j=1}^{i-1}B_{j,n}.$$

Тогда, поскольку $S=\sum_{i=1}^{\infty}B'_{i,n}$, для каждой точки $s\in S$ справедливо неравенство $\|x(s)-x_n(s)\|<1/n$. Каждая из функций $x_n(s)$ сильно $\mathfrak{B}$-измерима, так как множества B'_{in} $\mathfrak{B}$-измеримы. Отсюда следует, что функция $x(s)$, равная сильному пределу последовательности $\{x_n(s)\}$, тоже сильно $\mathfrak{B}$-измерима.

Доказательство леммы. Пусть последовательность $\{x_n(s)\}$ сильно плотна в пространстве X. Рассмотрим отображение $f\to\varphi_n(f)=\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$ единичного шара $S'=\{f\in X';\ \|f\|\leqslant 1\}$ пространства X' в n-мерное гильбертово пространство $l^2(n)$ векторов $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ с нормой $\|(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\|=\left(\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2\right)^{1/2}$. Пространство $l^2(n)$ сепарабельно, поэтому для каждого фиксированного n существует последовательность $\{f_{n,k}\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ из S', такая, что множество $\{\varphi_n(f_{n,k}), k=1, 2, \ldots\}$ плотно в образе $\varphi_n(S')$ шара S'.

Итак, мы показали, что для любого элемента $f_0 \in S'$ можно выбрать такую подпоследовательность $\{f_{n, m_n}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что $|f_{n, m_n}(x_i) - f_0(x_i)| < 1/n$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} f_{n, m_n}(x_i) = f_0(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и, следовательно, по теореме 10, гл. V, § 1, $\lim\limits_{n\to\infty} f_{n, m_n}(x) = f_0(x)$ для всех $x \in X$.

5. Интеграл Бохнера

Допустим, что на пространстве с мерой $(S, \mathfrak{B}, m)$ задана простая функция $x(s)$, принимающая значения в B-пространстве X. Пусть $x(s)$ принимает значение $x_i \neq 0$ на множестве $B_i \in \mathfrak{B}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где B_i не пересекаются, $m(B_i) < \infty$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и, кроме того, $x(s) = 0$ при $s \in \left(S - \sum\limits_{i=1}^{n} B_i\right)$. Тогда можно определить m-интеграл $\int\limits_S x(s)\, m(ds)$ функции $x(s)$ по множеству S, полагая его равным $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i m(B_i)$. Далее с помощью предельного перехода можно построить m-интеграл для функций более широкого класса. Дадим теперь точные определения.

Определения. Функция $x(s)$, определенная на пространстве с мерой $(S, \mathfrak{B}, m)$ и принимающая значения в B-пространстве X, называется *m-интегрируемой по Бохнеру*, если существует последовательность простых функций $\{x_n(s)\}$, сильно сходящаяся к $x(s)$ m-п. в. в S так, что при этом

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_S \|x(s) - x_n(s)\|\, m(ds) = 0. \tag{1}$$

Для любого множества $B \in \mathfrak{B}$ *m-интеграл Бохнера* функции $x(s)$ по множеству B определяется как

$$\int\limits_B x(s)\, m(ds) \equiv s\text{-}\lim_{n\to\infty} \int\limits_S C_B(s)\, x_n(s)\, m(ds), \tag{2}$$

где $C_B(s)$ — характеристическая функция множества B.

Для обоснования корректности этого определения нужно убедиться в том, что сильный предел, стоящий в правой части (2), действительно существует и что величина этого предела не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности функций $\{x_n(s)\}$.

Обоснование корректности определения. Функция $x(s)$ сильно $\mathfrak{B}$-измерима, и поэтому условие (1) имеет смысл, так как $\mathfrak{B}$-измеримость функции $\|x(s) - x_n(s)\|$ была установлена в процессе доказа-