Итак, мы показали, что для любого элемента $f_0 \in S'$ можно выбрать такую подпоследовательность $\{f_{n, m_n}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что $|f_{n, m_n}(x_i) - f_0(x_i)| < 1/n$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} f_{n, m_n}(x_i) = f_0(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и, следовательно, по теореме 10, гл. V, § 1, $\lim\limits_{n\to\infty} f_{n, m_n}(x) = f_0(x)$ для всех $x \in X$.

5. Интеграл Бохнера

Допустим, что на пространстве с мерой $(S, \mathfrak{B}, m)$ задана простая функция $x(s)$, принимающая значения в B-пространстве X. Пусть $x(s)$ принимает значение $x_i \neq 0$ на множестве $B_i \in \mathfrak{B}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где B_i не пересекаются, $m(B_i) < \infty$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и, кроме того, $x(s) = 0$ при $s \in \left(S - \sum\limits_{i=1}^{n} B_i\right)$. Тогда можно определить m-интеграл $\int\limits_S x(s)\, m(ds)$ функции $x(s)$ по множеству S, полагая его равным $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i m(B_i)$. Далее с помощью предельного перехода можно построить m-интеграл для функций более широкого класса. Дадим теперь точные определения.

Определения. Функция $x(s)$, определенная на пространстве с мерой $(S, \mathfrak{B}, m)$ и принимающая значения в B-пространстве X, называется *m-интегрируемой по Бохнеру*, если существует последовательность простых функций $\{x_n(s)\}$, сильно сходящаяся к $x(s)$ m-п. в. в S так, что при этом

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_S \|x(s) - x_n(s)\|\, m(ds) = 0. \tag{1}$$

Для любого множества $B \in \mathfrak{B}$ *m-интеграл Бохнера* функции $x(s)$ по множеству B определяется как

$$\int\limits_B x(s)\, m(ds) \equiv s\text{-}\lim_{n\to\infty} \int\limits_S C_B(s)\, x_n(s)\, m(ds), \tag{2}$$

где $C_B(s)$ — характеристическая функция множества B.

Для обоснования корректности этого определения нужно убедиться в том, что сильный предел, стоящий в правой части (2), действительно существует и что величина этого предела не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности функций $\{x_n(s)\}$.

Обоснование корректности определения. Функция $x(s)$ сильно $\mathfrak{B}$-измерима, и поэтому условие (1) имеет смысл, так как $\mathfrak{B}$-измеримость функции $\|x(s) - x_n(s)\|$ была установлена в процессе доказательства теоремы Петтиса. Предел $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_B x_n(s)\,m(ds)$ существует, так как пространство X полно и

$$\left\| \int\limits_B x_n(s)\,m(ds) - \int\limits_B x_k(s)\,m(ds) \right\| = \left\| \int\limits_B (x_n(s) - x_k(s))\,m(ds) \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_B \| x_n(s) - x_k(s) \|\,m(ds) \leqslant \int\limits_S \| x_n(s) - x(s) \|\,m(ds) +$$
$$+ \int\limits_S \| x(s) - x_k(s) \|\,m(ds).$$

Независимость предела от выбора аппроксимирующей последовательности вполне очевидна, так как из двух различных аппроксимирующих последовательностей можно образовать одну последовательность, аппроксимирующую ту же самую функцию $x(s)$.

Теорема 1 (Бохнер [1]). Для того чтобы сильно $\mathfrak{B}$-измеримая функция $x(s)$ была m-интегрируемой по Бохнеру, необходимо и достаточно, чтобы норма $\|x(s)\|$ была m-интегрируемой.

Доказательство. Докажем необходимость условия теоремы. Мы имеем $\|x(s)\| \leqslant \|x_n(s)\| + \|x(s) - x_n(s)\|$. Из условия (1) и m-интегрируемости нормы $\|x_n(s)\|$ следует, что норма $\|x(s)\|$ тоже m-интегрируема и

$$\int\limits_B \|x(s)\|\,m(ds) \leqslant \int\limits_B \|x_n(s)\|\,m(ds) + \int\limits_B \|x(s) - x_n(s)\|\,m(ds).$$

Более того, поскольку

$$\int\limits_B \big| \|x_n(s)\| - \|x_k(s)\| \big|\,m(ds) \leqslant \int\limits_B \|x_n(s) - x_k(s)\|\,m(ds),$$

то в силу условия (1) предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_B \|x_n(s)\|\,m(ds)$ существует и

$$\int\limits_B \|x(s)\|\,m(ds) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_B \|x_n(s)\|\,m(ds).$$

Докажем достаточность. Пусть $\{x_n(s)\}$ — произвольная последовательность простых функций, сильно сходящаяся к $x(s)$ m-п. в. Введем вспомогательные функции $y_n(s)$:

$$y_n(s) = \begin{cases} x_n(s), & \text{если } \|x_n(s)\| \leqslant \|x(s)\|(1 + n^{-1}), \\ 0, & \text{если } \|x_n(s)\| > \|x(s)\|(1 + n^{-1}). \end{cases}$$

Полученная последовательность простых функций $\{y_n(s)\}$ удовлетворяет неравенствам $\|y_n(s)\| \leqslant \|x(s)\| \cdot (1 + n^{-1})$ и, кроме того,

$\lim\limits_{n\to\infty} \|x(s)-y_n(s)\|=0$ m-п. в. Так как функция $\|x(s)\|$ m-интегрируема, то к функциям $\|x(s)-y_n(s)\|\leqslant 2\|x(s)\|(1+n^{-1})$ можно применить лемму Лебега — Фату; мы получим

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_S \|x(s)-y_n(s)\|\,m(ds)=0,$$

откуда следует, что функция $x(s)$ m-интегрируема по Бохнеру.

Следствие 1. Приведенное выше доказательство показывает, что

$$\int\limits_B \|x(s)\|\,m(ds)\geqslant\left\|\int\limits_B x(s)\,m(ds)\right\|,$$

и поэтому интеграл $\int\limits_B x(s)\,m(ds)$ m-абсолютно непрерывен в том смысле, что

$$s\text{-}\lim_{m(B)\to 0}\int\limits_B x(s)\,m(ds)=0.$$

Свойство конечной аддитивности $\int\limits_{\sum_{j=1}^n B_j} x(s)\,m(ds)=\sum\limits_{j=1}^{n}\int\limits_{B_j} x(s)\,m(ds)$ интеграла очевидно, а так как интеграл $\int\limits_B \|x(s)\|\,m(ds)$ σ-аддитивен, то и интеграл $\int\limits_B x(s)\,m(ds)$ σ-аддитивен, т. е.

$$\text{если}\quad B=\sum_{j=1}^{\infty}B_j\quad\text{и}\quad m(B_j)<\infty\quad(j=1,\ 2,\ \ldots),$$

$$\text{то}\quad\int\limits_{\sum_{j=1}^{\infty}B_j} x(s)\,m(ds)=s\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{B_j} x(s)\,m(ds).$$

Следствие 2. Пусть ограниченный линейный оператор T определен на B-пространстве X и действует в B-пространство Y. Если функция $x(s)$, принимающая значения в пространстве X, m-интегрируема по Бохнеру, то функция $Tx(s)$ со значениями из Y тоже m-интегрируема по Бохнеру и

$$\int\limits_B Tx(s)\,m(ds)=T\int\limits_B x(s)\,m(ds).$$

Доказательство. Выберем произвольную последовательность простых функций $\{y_n(s)\}$, удовлетворяющую условию

$$\|y_n(s)\| \leqslant \|x(s)\| \cdot (1 + n^{-1}) \quad \text{и} \quad s\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n(s) = x(s) \qquad m\text{-п. в.}$$

Так как линейный оператор T непрерывен, то $\int\limits_B Ty_n(s)\, m(ds) = T \int\limits_B y_n(s)\, m(ds)$. Более того, из непрерывности T следует, что

$$\|Ty_n(s)\| \leqslant \|T\| \cdot \|y_n(s)\| \leqslant \|T\| \cdot \|x(s)\| \cdot (1 + n^{-1})$$

$$\text{и} \quad s\text{-}\lim_{n\to\infty} Ty_n(s) = Tx(s) \quad m\text{-п. в.}$$

Следовательно, функции $Tx(s)$ тоже m-интегрируемы по Бохнеру и

$$\int\limits_B Tx(s)\, m(ds) = s\text{-}\lim_{n\to\infty} \int\limits_B Ty_n(s)\, m(ds) =$$

$$= s\text{-}\lim_{n\to\infty} T \int\limits_B y_n(s)\, m(ds) = T \int\limits_B x(s)\, m(ds).$$

Теорема 2 (Бохнер [1]). Пусть S есть n-мерное евклидово пространство, $\mathfrak{B}$ — семейство бэровских множеств этого пространства и $m(B)$ — мера Лебега множества B. Если функция $x(s)$ m-интегрируема по Бохнеру, а $P(s_0;\ \alpha)$ обозначает n-мерный куб с центром $s_0 \in S$ и сторонами длины 2α, то

$$s\text{-}\lim_{\alpha \downarrow 0} (2\alpha)^{-n} \int\limits_{P(s_0;\ \alpha)} x(s)\, m(ds) = x(s_0) \ \text{для } m\text{-почти всех точек } s_0 \in S.$$

Эту теорему называют теоремой о дифференцировании интеграла Бохнера.

Доказательство. Введем обозначение

$$D(x;\ s_0,\ \alpha) = (2\alpha)^{-n} \int\limits_{P(s_0;\ \alpha)} x(s)\, m(ds).$$

Если $\{x_n(s)\}$ — последовательность простых функций, таких, что $\|x_n(s)\| \leqslant \|x(s)\| \cdot (1 + n^{-1})$ и m-п. в. $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n(s) = x(s)$, то

$$D(x;\ s_0,\ \alpha) - x(s_0) = D(x - x_k;\ s_0,\ \alpha) + D(x_k;\ s_0,\ \alpha) - x(s_0),$$

и поэтому

$$\overline{\lim_{\alpha \downarrow 0}} \|D(x;\ s_0,\ \alpha) - x(s_0)\| \leqslant \overline{\lim_{\alpha \downarrow 0}} D(\|x - x_k\|;\ s_0,\ \alpha) +$$

$$+ \overline{\lim_{\alpha \downarrow 0}} \|D(x_k;\ s_0,\ \alpha) - x_k(s_0)\| + \|x_k(s_0) - x(s_0)\|.$$

Первый предел в правой части содержит интеграл Лебега от числовой функции и m-п. в. равен $\|x(s_0)-x_k(s_0)\|$. Второй член m-п. в. равен нулю, так как функция $x_k(s)$ простая. Следовательно,

$$\overline{\lim_{\alpha\to 0}}\|D(x;\ s_0,\ \alpha)-x(s_0)\|\leqslant 2\|x_k(s_0)-x(s_0)\|$$

для m-почти всех значений s_0. Полагая $k\to\infty$, мы получаем утверждение теоремы 2.

Замечание. В отличие от известных свойств числовых функций произвольная σ-аддитивная и m-абсолютно непрерывная функция множества, принимающая значения в некотором B-пространстве, не обязательно должна быть представима в виде некоторого m-интеграла Бохнера. Это подтверждается следующим примером.

Пример. Пусть $S=[0,\ 1]$, $\mathfrak{B}$ — семейство бэровских множеств отрезка $[0,\ 1]$, $m(B)$ — мера Лебега множества $B\in\mathfrak{B}$. Рассмотрим совокупность $m\ [1/3,\ 2/3]$ всех вещественных ограниченных функций $\xi=\xi(\theta)$, заданных на замкнутом интервале $[1/3,\ 2/3]$, с нормой $\|\xi\|=\sup\limits_{\theta}|\xi(\theta)|$. Определим на отрезке $[0,\ 1]$ функцию $x(s)=\xi(\theta;\ s)$, принимающую значения из множества $m\ [1/3,\ 2/3]$:

> графиком на s, y-плоскости вещественной функции $y=y_\theta(s)$, равной θ-координате $\xi(\theta;\ s)$ функции $x(s)$, является ломаная линия, соединяющая три точки $(0,\ 0)$, $(\theta,\ 1)$ и $(1,\ 0)$ в указанном порядке.

Тогда если $s\neq s'$, то

$$\|(s-s')^{-1}(x(s)-x(s'))\|=\sup_{\theta}|(s-s')^{-1}(\xi(\theta;\ s)-\xi(\theta;\ s')|\leqslant 3,$$

т. е. функция $x(s)$ удовлетворяет *условию Липшица* (по норме). Рассматривая выражение $(x(s)-x(s'))$ как функцию интервала с концами s и s', принимающую значения из множества $m\ [1/3,\ 2/3]$, мы можем, как это обычно делается, построить σ-аддитивную m-абсолютно непрерывную функцию множества $x(B)$, определенную на бэровских множествах отрезка $[0,\ 1]$.

Если функция $x(B)$ может быть представлена в виде m-интеграла Бохнера, то, как вытекает из предыдущей теоремы, функция $x(s)$ должна быть m-п. в. сильно дифференцируемой [1]) по s. Обозначим соответствующую сильную производную $x'(s)$ через $\eta(\theta;\ s)$; ее значения принадлежат множеству $m\ [1/3,\ 2/3]$. Тогда для всякого

[1]) Здесь и далее дифференцируемость понимается как существование предела $x'(s)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x(s+h)-x(s)}{h}$. В зависимости от топологии, в которой рассматривается этот предел, возникают понятия „сильной“, „слабой“ (и т. п.) дифференцируемости и производной $x'(s)$. — *Прим. перев.*

$\theta \in [1/3, 2/3]$ m-п. в. по переменной s выполняется условие

$$0 = \lim_{h\to 0} \| h^{-1}(x(s+h) - x(s)) - x'(s) \| \geqslant$$
$$\geqslant \lim_{h\to 0} \left| h^{-1}(\xi(\theta;\ s+h) - \xi(\theta;\ s)) - \eta(\theta;\ s) \right|.$$

Это означает, что функция $\xi(\theta;\ s)$ дифференцируема m-п. в. по s при всех значениях $\theta \in [1/3, 2/3]$, что противоречит ее построению.

Литература к главе V

Банах [1], Данфорд — Шварц [1], Хилле — Филлипс [1].

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ V

Слабые топологии и сопряженность в локально выпуклых линейных топологических пространствах

Изложение построено так, что читатель может пропустить это приложение при первом чтении и приступить непосредственно к изучению следующих глав.

1. Поляры

Определение. Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство. Для каждого множества $M \subseteq X$ определим его (*правую*) *поляру* M^0 формулой

$$M^0 = \left\{ x' \in X';\ \sup_{x \in M} |\langle x,\ x' \rangle| \leqslant 1 \right\}. \tag{1}$$

Аналогично для всякого множества $M' \subseteq X'$ определим его (*левую*) *поляру* ${}^0M'$ формулой

$${}^0M' = \left\{ x \in X;\ \sup_{x' \in M'} |\langle x,\ x' \rangle| \leqslant 1 \right\} = X \cap (M')^0, \tag{2}$$

где пространство X рассматривается как вложенное во второе сопряженное $(X'_s)'_s$. За фундаментальную систему окрестностей нуля в X, определяющих слабую топологию пространства X, можно принять систему множеств вида ${}^0M'$, где M' пробегает все конечные множества из X'. Фундаментальной системой окрестностей нуля в слабой * топологии пространства X' служит система множеств вида M^0, где M пробегает все конечные множества из X. Наконец, фундаментальной системой окрестностей нуля, определяющих сильную топологию пространства X', является семейство множеств вида M^0, где M пробегает совокупность всех ограниченных множеств из X.