$\theta \in [1/3, 2/3]$ m-п. в. по переменной s выполняется условие

$$0 = \lim_{h \to 0} \| h^{-1}(x(s+h) - x(s)) - x'(s) \| \geqslant$$
$$\geqslant \lim_{h \to 0} | h^{-1}(\xi(\theta; s+h) - \xi(\theta; s)) - \eta(\theta; s) |.$$

Это означает, что функция $\xi(\theta; s)$ дифференцируема m-п. в. по s при всех значениях $\theta \in [1/3, 2/3]$, что противоречит ее построению.

Литература к главе V

Банах [1], Данфорд — Шварц [1], Хилле — Филлипс [1].

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ V

Слабые топологии и сопряженность в локально выпуклых линейных топологических пространствах

Изложение построено так, что читатель может пропустить это приложение при первом чтении и приступить непосредственно к изучению следующих глав.

1. Поляры

Определение. Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство. Для каждого множества $M \subseteq X$ определим его (*правую*) *поляру* M^0 формулой

$$M^0 = \left\{ x' \in X'; \ \sup_{x \in M} |\langle x, x' \rangle| \leqslant 1 \right\}. \tag{1}$$

Аналогично для всякого множества $M' \subseteq X'$ определим его (*левую*) *поляру* ${}^0M'$ формулой

$${}^0M' = \left\{ x \in X; \ \sup_{x' \in M'} |\langle x, x' \rangle| \leqslant 1 \right\} = X \cap (M')^0, \tag{2}$$

где пространство X рассматривается как вложенное во второе сопряженное $(X'_s)'_s$. За фундаментальную систему окрестностей нуля в X, определяющих слабую топологию пространства X, можно принять систему множеств вида ${}^0M'$, где M' пробегает все конечные множества из X'. Фундаментальной системой окрестностей нуля в слабой * топологии пространства X' служит система множеств вида M^0, где M пробегает все конечные множества из X. Наконец, фундаментальной системой окрестностей нуля, определяющих сильную топологию пространства X', является семейство множеств вида M^0, где M пробегает совокупность всех ограниченных множеств из X.

Предложение. Поляра M^0 представляет собой уравновешенное выпуклое множество, замкнутое в слабой * топологии пространства X'.

Доказательство. Линейный функционал $f(x') = \langle x, x' \rangle$ непрерывен в слабой * топологии пространства X' при любом фиксированном значении $x \in X$. Поэтому множество $M^0 = \bigcap\limits_{m \in M} \{m\}^0$ замкнуто в слабой * топологии пространства X'. Уравновешенность и выпуклость множества M^0 очевидны.

Об одном приложении теоремы Тихонова

Теорема 1. Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство и A — некоторая выпуклая и уравновешенная окрестность нуля в X. Тогда поляра A^0 бикомпактна в слабой* топологии пространства X'.

Доказательство. Обозначим через $p(x)$ функционал Минковского множества A. Для произвольных фиксированных значений $x \in X$ рассмотрим на комплексной плоскости C шары $S_x = \{z \in C;\ |z| \leqslant \leqslant p(x)\}$ и их тихоновское произведение $S = \prod\limits_{x \in X} S_x$. Множество S, согласно теореме Тихонова, бикомпактно. Всякий элемент $x' \in X'$ определяется совокупностью значений $x'(x) = \langle x, x' \rangle$, $x \in X$. Так как $x \in (p(x) + \varepsilon) A$ при любом $\varepsilon > 0$, то из условия $x' \in X'$ следует, что $\langle x, x' \rangle = \langle (p(x) + \varepsilon) a, x' \rangle$, где a — некоторый элемент из A. Поэтому если $x' \in A^0$, то $|x'(x)| \leqslant p(x) + \varepsilon$, т. е. $x'(x) \in S_x$. Таким образом, множество A^0 можно рассматривать как подмножество в S. Более того, нетрудно проверить, что топология, индуцированная на поляре A^0 слабой* топологией пространства X', совпадает с топологией, индуцированной на множестве A^0 топологией тихоновского произведения $S = \prod\limits_{x \in X} S_x$.

Итак, для нашей цели достаточно показать, что A^0 — замкнутое подмножество в S. Допустим, что $y = \prod\limits_{x \in X} y(x)$ — некоторый элемент замыкания множества A^0 в слабой* топологии пространства S. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и любые две точки $x_1, x_2 \in X$. Совокупность всех $u = \prod\limits_{x \in X} u(x) \in S$, таких, что

$$|u(x_1) - y(x_1)| < \varepsilon, \ |u(x_2) - y(x_2)| < \varepsilon \text{ и } |u(x_1 + x_2) - y(x_1 + x_2)| < \varepsilon,$$

образует окрестность элемента y в пространстве S. Эта окрестность содержит некоторую точку $x' \in A^0$, и, поскольку x' — непрерывный линейный функционал на X, имеют место неравенства

$$|y(x_1 + x_2) - y(x_1) - y(x_2)| \leqslant |y(x_1 + x_2) - \langle x_1 + x_2, x' \rangle| + \\ + |\langle x_1, x' \rangle - y(x_1)| + |\langle x_2, x' \rangle - y(x_2)| < 3\varepsilon.$$

Отсюда видно, что $y(x_1+x_2)=y(x_1)+y(x_2)$. Точно так же можно убедиться в том, что $y(\beta x)=\beta y(x)$, поэтому y — линейный функционал на X. Из представления $y=\prod_{x\in X} y(x)\in S$ следует, что $|y(x)|\leqslant p(x)$. Функционал $p(x)$ непрерывен, поэтому $y(x)$ — это непрерывный линейный функционал, т. е. $y\in X'$. С другой стороны, y представляет собой предельную точку множества A^0 в слабой* топологии, и, следовательно, для любого $\varepsilon>0$ и произвольного $a\in A$ найдется такой элемент $x'\in A^0$, что $|y(a)-\langle a, x'\rangle|\leqslant\varepsilon$. Значит, $|y(a)|\leqslant|\langle a, x'\rangle|+\varepsilon\leqslant 1+\varepsilon$, откуда $|y(a)|\leqslant 1$, т. е. $y\in A^0$.

Следствие. Единичный шар $S^*=\{x'\in X';\ \|x'\|\leqslant 1\}$ пространства X'_s, сопряженного нормированному линейному пространству X, бикомпактен в слабой* топологии пространства X'.

Об одном приложении теоремы Мазура

Теорема 2. Пусть M — выпуклое уравновешенное замкнутое множество в локально выпуклом линейном топологическом пространстве X. Тогда $M={}^0(M^0)$.

Доказательство. Ясно, что $M\subseteq{}^0(M^0)$. Если существует элемент $x_0\in{}^0(M)^0-M$, то по теореме Мазура (теорема 3, § 6, гл. IV) найдется элемент $x'_0\in X'$, такой, что $\langle x_0, x'_0\rangle>1$ и $|\langle x, x'_0\rangle|\leqslant 1$ для всех $x\in M$. Последнее неравенство показывает, что $x'_0\in M^0$, поэтому элемент x_0 не может принадлежать множеству ${}^0(M^0)$.

2. Бочечные пространства

Определение. Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство. Всякое выпуклое уравновешенное поглощающее замкнутое множество такого пространства называется *бочкой*. Если каждая бочка пространства X является окрестностью нуля, то пространство X называется *бочечным*.

Теорема 1. Если локально выпуклое линейное топологическое пространство X не является множеством первой категории, то X представляет собой бочечное пространство.

Доказательство. Пусть T — некоторая бочка пространства X. Так как множество T — поглощающее, X можно представить в виде объединения замкнутых множеств $nT=\{nt;\ t\in T\}$, где n принимает все положительные целые значения. Если X не является множеством первой категории, то по крайней мере одно из множеств nT содержит внутреннюю точку. Следовательно, и множество T содержит некоторую внутреннюю точку x_0. Если $x_0=0$, то T оказывается окрестностью нуля в X. Если же $x_0\neq 0$, то $-x_0\in T$, потому что множество T — уравновешенное. Поэтому точка $-x_0$, так же как и x_0, является внутренней для T. Отсюда вытекает, что множество T, будучи вы-