Отсюда видно, что $y(x_1+x_2)=y(x_1)+y(x_2)$. Точно так же можно убедиться в том, что $y(\beta x)=\beta y(x)$, поэтому y — линейный функционал на X. Из представления $y=\prod_{x\in X} y(x)\in S$ следует, что $|y(x)|\leqslant p(x)$. Функционал $p(x)$ непрерывен, поэтому $y(x)$ — это непрерывный линейный функционал, т. е. $y\in X'$. С другой стороны, y представляет собой предельную точку множества A^0 в слабой* топологии, и, следовательно, для любого $\varepsilon>0$ и произвольного $a\in A$ найдется такой элемент $x'\in A^0$, что $|y(a)-\langle a, x'\rangle|\leqslant\varepsilon$. Значит, $|y(a)|\leqslant|\langle a, x'\rangle|+\varepsilon\leqslant 1+\varepsilon$, откуда $|y(a)|\leqslant 1$, т. е. $y\in A^0$.

Следствие. Единичный шар $S^*=\{x'\in X';\ \|x'\|\leqslant 1\}$ пространства X'_s, сопряженного нормированному линейному пространству X, бикомпактен в слабой* топологии пространства X'.

Об одном приложении теоремы Мазура

Теорема 2. Пусть M — выпуклое уравновешенное замкнутое множество в локально выпуклом линейном топологическом пространстве X. Тогда $M={}^0(M^0)$.

Доказательство. Ясно, что $M\subseteq{}^0(M^0)$. Если существует элемент $x_0\in{}^0(M)^0-M$, то по теореме Мазура (теорема 3, § 6, гл. IV) найдется элемент $x'_0\in X'$, такой, что $\langle x_0, x'_0\rangle>1$ и $|\langle x, x'_0\rangle|\leqslant 1$ для всех $x\in M$. Последнее неравенство показывает, что $x'_0\in M^0$, поэтому элемент x_0 не может принадлежать множеству ${}^0(M^0)$.

2. Бочечные пространства

Определение. Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство. Всякое выпуклое уравновешенное поглощающее замкнутое множество такого пространства называется *бочкой*. Если каждая бочка пространства X является окрестностью нуля, то пространство X называется *бочечным*.

Теорема 1. Если локально выпуклое линейное топологическое пространство X не является множеством первой категории, то X представляет собой бочечное пространство.

Доказательство. Пусть T — некоторая бочка пространства X. Так как множество T — поглощающее, X можно представить в виде объединения замкнутых множеств $nT=\{nt;\ t\in T\}$, где n принимает все положительные целые значения. Если X не является множеством первой категории, то по крайней мере одно из множеств nT содержит внутреннюю точку. Следовательно, и множество T содержит некоторую внутреннюю точку x_0. Если $x_0=0$, то T оказывается окрестностью нуля в X. Если же $x_0\neq 0$, то $-x_0\in T$, потому что множество T — уравновешенное. Поэтому точка $-x_0$, так же как и x_0, является внутренней для T. Отсюда вытекает, что множество T, будучи выпуклым, содержит $0=(x_0-x_0)/2$ как внутреннюю точку, и теорема доказана.

Следствие 1. Все локально выпуклые F-пространства и, в частности, все B-пространства и пространство $\mathfrak{E}(R^n)$ являются бочечными.

Следствие 2. Метрическое линейное пространство $\mathfrak{D}_K(R^n)$ является бочечным.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_k\}$ — последовательность элементов пространства $\mathfrak{D}_K(R^n)$, фундаментальная относительно функции расстояния

$$\operatorname{dis}(\varphi, \psi)=\sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} \frac{p_m(\varphi-\psi)}{1+p_m(\varphi-\psi)}, \text{ где } p_m(\varphi)=\sup_{|j|\leqslant m,\, x\in K} |D^j\varphi(x)|.$$

Функции $D^j\varphi_k(x)$ последовательности $\{D^j\varphi_k(x)\}$ при любом дифференциальном операторе D^j равностепенно непрерывны и равномерно ограничены, т. е.

$$\lim_{|x^1-x^2|\downarrow 0}\ \sup_{k\geqslant 1} |D^j\varphi_k(x^1)-D^j\varphi_k(x^2)|=0 \quad \text{и} \quad \sup_{x\in K,\, k\geqslant 1} |D^j\varphi_k(x)|<\infty.$$

Это следует из неравенства $\sup\limits_{x\in K,\, k\geqslant 1}\left|\frac{\partial}{\partial x_s} D^j\varphi_k(x)\right|<\infty$, справедливого для всякой координаты x_s. По теореме Асколи — Арцела существует подпоследовательность $\{D^j\varphi_{k'}(x)\}$, равномерно сходящаяся на множестве K. При помощи диагонального процесса мы можем построить такую подпоследовательность $\{\varphi_{k''}(x)\}$ последовательности $\{\varphi_k(x)\}$, что последовательность $\{D^j\varphi_{k''}(x)\}$ равномерно сходится на множестве K при любом дифференциальном операторе D^j. Поэтому

$$\lim_{k''\to\infty} D^j\varphi_{k''}(x)=D^j\varphi(x), \quad \text{где } \varphi(x)=\lim_{k''\to\infty}\varphi_{k''}(x),$$

причем эти предельные переходы равномерны на множестве K. Это означает, что метрическое пространство $\mathfrak{D}_K(R^n)$ полно и поэтому не может быть множеством первой категории.

Замечание. (1) Из приведенного доказательства следует, что всякое ограниченное множество пространства $\mathfrak{D}(R^n)$ относительно бикомпактно в топологии пространства $\mathfrak{D}(R^n)$. В самом деле, любое ограниченное множество $B\subseteq\mathfrak{D}(R^n)$ должно содержаться в некотором пространстве вида $\mathfrak{D}_K(R^n)$, где K — бикомпактное множество в R^n. Кроме того, из ограниченности B вытекает равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность функций $\{D^j\varphi;\ \varphi\in B\}$ при любом операторе D^j. (2) Совершенно аналогично можно убедиться в том, что всякое замкнутое множество пространства $\mathfrak{E}(R^n)$ относительно бикомпактно в нем.

Следствие 3. Пространство $\mathfrak{D}(R^n)$ является бочечным.

Доказательство. Пространство $\mathfrak{D}(R^n)$ является индуктивным пределом пространств $\{\mathfrak{D}_K(R^n)\}$, когда K пробегает все бикомпактные подмножества пространства R^n. Поэтому наше утверждение вытекает из следующего предложения.

Предложение. Допустим, что некоторое локально выпуклое линейное топологическое пространство X является индуктивным пределом своих бочечных подпространств X_α, $\alpha \in A$. Тогда X — бочечное пространство.

Доказательство. Обозначим через V некоторую бочку пространства X. В силу непрерывности тождественного отображения $T_\alpha : x \to x$ подпространства X_α в X прообраз $T_\alpha^{-1}(V) = V \cap X_\alpha$, так же как и множество V, замкнут. Поэтому множество $V \cap X_\alpha$ образует бочку в X_α. Поскольку пространство X_α — бочечное, множество $V \cap X_\alpha$ является окрестностью нуля в X_α. Следовательно, множество V является окрестностью нуля в X, ибо X — индуктивный предел подпространств X_α.

Теорема 2. Пусть X — бочечное пространство. Тогда определенное в § 8 гл. IV отображение $x \to Jx$ пространства X в $(X'_s)'_s$ является топологическим отображением пространства X на JX, при условии, что в JX взята его относительная топология как подмножества пространства $(X'_s)'_s$.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве X'_s произвольное ограниченное множество B'. Тогда поляра $(B')^0 = \{x'' \in (X'_s)'_s;\ \sup_{x' \in B'} |\langle x', x''\rangle| \leqslant 1\}$ множества B' является окрестностью нуля в $(X'_s)'_s$ и, кроме того, выпуклым уравновешенным и поглощающим множеством, замкнутым в $(X'_s)'_s$.

Поэтому $(B')^0 \cap X = {}^0(B')$ — это выпуклое уравновешенное и поглощающее множество в X. Как поляра множество ${}^0(B')$ замкнуто в слабой топологии пространства X и, следовательно, замкнуто в исходной топологии X. Таким образом, множество ${}^0(B') = (B')^0 \cap X$ образует бочку в пространстве X и поэтому является окрестностью нуля в X. Отсюда следует, что отображение $x \to Jx$ пространства X в $(X'_s)'_s$ непрерывно, так как топология пространства $(X'_s)'_s$ определяется фундаментальной системой окрестностей нуля вида $(B')^0$, где B' пробегает все ограниченные множества пространства X'.

Пусть теперь U — произвольная выпуклая уравновешенная и замкнутая окрестность нуля в X. Тогда, как показано в предыдущем параграфе, $U = {}^0(U^0)$. Значит, $JU = JX \cap (U^0)^0$. С другой стороны, U^0 — ограниченное множество пространства X'_s, ибо для всякого ограниченного множества $B \subseteq X$ существует такое $\alpha > 0$, что $\alpha B \subseteq U$ и, следовательно, $(\alpha B)^0 \supseteq U^0$. Это означает, что множество $(U^0)^0$ является окрестностью элемента $0 \in (X'_s)'_s$. Поэтому образ JU окрестности U точки $0 \in X$ представляет собой окрестность нуля подпространства JX в его относительной топологии как подмножества пространства $(X'_s)'_s$.