3. Полурефлексивность и рефлексивность

Определение 1. Локально выпуклое линейное топологическое пространство X называется *полурефлексивным*, если всякий непрерывный линейный функционал, заданный на пространстве X'_s, может быть представлен в виде

$$\langle x, x' \rangle, \text{ где } x \text{ — некоторый элемент из } X. \tag{1}$$

Таким образом, пространство X полурефлексивно в том и только в том случае, когда

$$X_w = (X'_s)'_{w^*}. \tag{2}$$

Определение 2. Локально выпуклое линейное топологическое пространство X называется *рефлексивным*, если

$$X = (X'_s)'_s. \tag{3}$$

Согласно теореме 2 предыдущего параграфа, справедливо

Предложение 1. Полурефлексивное бочечное пространство рефлексивно.

Из определения 2 вытекает

Предложение 2. Пространство, сильно сопряженное рефлексивному пространству, рефлексивно.

Теорема 1. Для того чтобы локально выпуклое линейное топологическое пространство X было полурефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы всякое замкнутое ограниченное множество в X было бикомпактным в слабой топологии этого пространства.

Доказательство. Пусть пространство X полурефлексивно, и пусть $B \subseteq X$ — некоторое замкнутое ограниченное множество. Рассмотрим множество $N = \bigcup\limits_{|\alpha| \leq 1} \alpha B$ и обозначим через $\mathrm{Conv}(N)$ *выпуклую оболочку* множества N, т. е. совокупность всех выпуклых комбинаций $x = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j n_j$ $\left(\alpha_j \geq 0,\ \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j = 1,\ k = 1, 2, \ldots\right)$ элементов n_j множества N. Замыкание $T = \mathrm{Conv}(N)^a$ множества $\mathrm{Conv}(N)$ образует в пространстве X замкнутое выпуклое уравновешенное и ограниченное множество. Но тогда по теореме 2 из § 1 этого приложения $T = {}^0(T^0)$. Множество T ограничено в X, поэтому T^0—окрестность нуля в X'_s. Следовательно, по теореме 1 из § 1 этого приложения множество $(T^0)^0$ бикомпактно в слабой * топологии пространства $(X'_s)'_{w^*}$. Отсюда, учитывая полурефлексивность пространства X, мы заключаем, что множество $T = {}^0(T^0)$ бикомпактно в слабой топологии пространства X.

Обратимся теперь к доказательству достаточности. Выберем произвольный элемент $x'' \in (X'_s)'_s$. Из сильной непрерывности x'' на X'_s

следует, что в пространстве X существует ограниченное множество B, такое, что

$$|\langle x', x''\rangle| \leqslant 1 \text{ для всех } x' \in B^0, \text{ т. е. } x'' \in (B^0)^0.$$

Мы можем, не ограничивая общности, считать множество B выпуклым уравновешенным и замкнутым в X. По условию теоремы множество B бикомпактно в слабой топологии пространства X. Следовательно, $B = B^{wa}$, где B^{wa} обозначает замыкание B в слабой топологии пространства X. Поскольку X_w можно вложить в $(X'_s)'_{w^*}$ как линейное топологическое подпространство, справедливо включение $(B^0)^0 \supseteq B^{wa} = B$. Поэтому остается показать, что x'' — предельная точка множества B в пространстве $(X'_s)'_{w^*}$. Рассмотрим отображение $x \to \varphi(x) = \{\langle x, x'_1\rangle, \ldots, \langle x, x'_n\rangle\}$ пространства X в $l^2(n)$, где $x'_1, \ldots, x'_n \in X'$. Образ $\varphi(B)$ выпуклого и слабо бикомпактного множества B будет при этом выпуклым и бикомпактным. Если элемент $\{\langle x'_1, x''\rangle, \ldots, \langle x'_n, x''\rangle\}$ не принадлежит $\varphi(B)$, то по теореме Мазура найдется такая точка $\{c_1, \ldots, c_n\} \in l^2(n)$, что

$$\sup_{b \in B} \left|\sum_i c_i \langle b, x'_i\rangle\right| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \left(\sum_i c_i \langle x'_i, x''\rangle\right) > 1.$$

Но тогда $\sum_i c_i x'_i \in B^0$, а это означает, что x'' не принадлежит множеству $(B^0)^0$.

Теорема 2. Для того чтобы локально выпуклое линейное топологическое пространство X было рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы оно было бочечным и чтобы всякое ограниченное замкнутое множество в нем было бикомпактно в слабой топологии пространства X. В частности, пространства $\mathfrak{D}(R^n)$ и $\mathfrak{E}(R^n)$ рефлексивны.

Доказательство. Достаточность сформулированных условий уже доказана. Докажем, что первое условие необходимо.

Пусть T — некоторая бочка пространства X. Мы должны показать, что T поглощает всякое ограниченное множество B пространства X, т. е. $B^0 \supseteq \alpha T^0$ $(\alpha > 0)$. В самом деле, если это так, то множество T^0 ограничено в X'_s, поскольку B^0 — окрестность точки $0 \in X'_s$. Согласно предложению и теореме 2 из § 1 этого приложения, $T = {}^0(T^0)$. По условиям теоремы пространство X рефлексивно, поэтому ${}^0(T^0) = (T^0)^0$ и, следовательно, $T = (T^0)^0$. Таким образом, бочка T является окрестностью точки $0 \in X = (X'_s)'_s$. Поэтому пространство X — бочечное.

Убедимся теперь в том, что всякая бочка T пространства X поглощает любое ограниченное множество $B \subseteq X$. По условиям теоремы замкнутое выпуклое и уравновешенное множество

$K = \text{Conv}\left(\bigcup_{|\alpha| \leqslant 1} \alpha B\right)^a$ бикомпактно в слабой топологии X. Положим $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} nK$ и обозначим через $p(x)$ функционал Минковского множества K. Тогда, поскольку K слабо бикомпактно в Y, функционал $p(x)$ определяет в Y норму. Это означает, что система $\{\alpha K\}$ $(\alpha > 0)$ образует фундаментальную систему окрестностей нормированного линейного пространства Y и Y является B-пространством, потому что множество K бикомпактно. Следовательно, пространство Y—бочечное. С другой стороны, так как K ограничено в X, топология, определяемая в пространстве Y нормой $p(x)$, сильнее, чем относительная топология Y как подмножества пространства X. Множество T как бочка пространства X замкнуто в X. Следовательно, множество $T \cap Y$ замкнуто в Y относительно топологии, определяемой нормой $p(x)$. Поэтому множество $T \cap Y$ — бочка B-пространства Y, и, следовательно, оно является окрестностью нуля в B-пространстве Y. Таким образом, мы доказали, что $T \cap Y$ и тем более T поглощает множество $K \supseteq B$.

4. Теорема Эберлейна — Шмульяна

Эта теорема имеет ряд очень важных приложений.

Теорема (Эберлейн — Шмульян). Для того чтобы B-пространство X было рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы всякая сильно ограниченная последовательность его элементов содержала подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой точке пространства X.

Для доказательства нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 1. Если сильно сопряженное X'_s к B-пространству X сепарабельно, то и само пространство X сепарабельно.

Лемма 2 (Банах). Для того чтобы линейное подпространство M' сопряженного X' к B-пространству X было замкнуто в слабой* топологии, необходимо и достаточно, чтобы M' содержало все слабо* предельные точки всякого сильно ограниченного подмножества из M'.

Лемма 1 уже доказана в § 2 гл. V.

Необходимость условия леммы 2 очевидна; остается доказать его достаточность.

Доказательство (Хилле — Филлипс [1]). Из условия следует, что множество M' сильно замкнуто. Пусть точка $x'_0 \notin M'$. Можно показать, что для всякой постоянной C, удовлетворяющей неравенству $0 < C < \inf_{x' \in M'} \|x' - x'_0\|$, найдется элемент $x_0 \in X$, такой, что $\|x_0\| \leqslant 1/C$ и

$$\langle x_0, x'_0 \rangle = 1, \quad \langle x_0, x' \rangle = 0 \text{ для всех } x' \in M'. \tag{1}$$