ГЛАВА VI

Преобразование Фурье и дифференциальные уравнения

Преобразование Фурье представляет собой один из сильнейших методов исследования в классическом и современном анализе. В последние годы область применения метода Фурье значительно расширилась в связи с развитием теории обобщенных функций Соболева [1] и Л. Шварца [1]. В работах Эренпрейса, Мальгранжа и особенно Хёрмандера [6] этот метод успешно применяется к исследованию линейных дифференциальных уравнений с частными производными.

1. Преобразование Фурье быстро убывающих функций

Определение 1. Обозначим через $\mathfrak{S}(R^n)$ совокупность всех функций $f \in C^\infty(R^n)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{x \in R^n} |x^\beta D^\alpha f(x)| < \infty \quad \left(x^\beta = \prod_{j=1}^n x_j^{\beta_j}\right) \tag{1}$$

при произвольных $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, где α_j, β_j — неотрицательные целые числа. Такие функции мы будем называть *быстро убывающими* (при $x \to \infty$).

Пример. Функция $\exp(-|x|^2)$ и все функции $f \in C_0^\infty(R^n)$ — быстро убывающие.

Предложение 1. Множество $\mathfrak{S}(R^n)$ с алгебраическими операциями сложения функций и умножения функций на комплексные числа и с топологией, определяемой системой полунорм вида

$$p(f) = \sup_{x \in R^n} |P(x) D^\alpha f(x)|, \quad \text{где} \quad P(x) \text{ — полином,} \tag{2}$$

образует локально выпуклое линейное топологическое пространство.

Предложение 2. Множество $\mathfrak{S}(R^n)$ замкнуто по отношению к действию линейных дифференциальных операторов в частных производных с полиномиальными коэффициентами.

Предложение 3. Множество $C_0^\infty(R^n)$ плотно в пространстве $\mathfrak{S}(R^n)$ в топологии $\mathfrak{S}(R^n)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{S}(R^n)$; выберем такую функцию $\psi \in C_0^\infty(R^n)$, что $\psi(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$

имеем $f_\varepsilon(x) = f(x)\psi(\varepsilon x) \in C_0^\infty(R^n)$. Применяя формулу Лейбница дифференцирования произведения функций, мы видим, что выражение

$$D^\alpha(f_\varepsilon(x) - f(x)) = D^\alpha\{f(x)(\psi(\varepsilon x) - 1)\}$$

представляет собой линейную комбинацию конечного числа членов вида

$$D^\beta f(x) \cdot (\varepsilon)^{|\gamma|}\{D^\gamma\psi(y)\}_{y=\varepsilon x}, \quad \text{где} \quad |\beta| + |\gamma| = |\alpha|, \quad |\gamma| > 0,$$

и слагаемого $D^\alpha f(x)(\psi(\varepsilon x) - 1)$. Отсюда видно, что при $\varepsilon \downarrow 0$ функция $f_\varepsilon(x)$ стремится к $f(x)$ в топологии пространства $\mathfrak{S}(R^n)$.

Определение 2. Для всякой функции $f \in \mathfrak{S}(R^n)$ определим ее *преобразование Фурье* $\hat{f}$ формулой

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{R^n} e^{-i\langle\xi, x\rangle}f(x)\,dx, \tag{3}$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\langle\xi, x\rangle = \sum_{j=1}^n \xi_j x_j$ и $dx = dx_1\,dx_2 \ldots dx_n$. Функция

$$\tilde{g}(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{R^n} e^{i\langle x, \xi\rangle}g(\xi)\,d\xi, \tag{4}$$

где $g \in \mathfrak{S}(R^n)$, называется *обратным преобразованием Фурье* функции g.

Предложение 4. Преобразование Фурье $f \to \hat{f}$ линейно и непрерывно отображает пространство $\mathfrak{S}(R^n)$ в себя. Обратное преобразование Фурье $g \to \tilde{g}$ также отображает $\mathfrak{S}(R^n)$ в себя линейно и непрерывно.

Доказательство. Формально дифференцируя (3) под знаком интеграла, мы получаем

$$D^\alpha\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-i\langle\xi, x\rangle}(-i)^{|\alpha|}x^\alpha f(x)\,dx. \tag{5}$$

Интеграл в правой части, согласно (1), сходится равномерно по ξ, поэтому такое дифференцирование допустимо. Следовательно, $\hat{f} \in C^\infty(R^n)$. Интегрируя по частям равенство (3), мы находим, что[1])

$$(i)^{|\beta|}\xi^\beta\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-i\langle\xi, x\rangle}D^\beta f(x)\,dx. \tag{6}$$

Отсюда

$$(i)^{|\beta|+|\alpha|}\xi^\beta D^\alpha\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-i\langle\xi, x\rangle}D^\beta(x^\alpha f(x))\,dx, \tag{7}$$

[1]) Здесь и далее подразумевается $\int\limits_{R^n}$. — *Прим. перев.*

а это и означает, что отображение $f \to \hat{f}$ непрерывно в топологии пространства $\mathfrak{S}(R^n)$. Отображение $g \to \tilde{g}$ рассматривается аналогично.

Теорема 1 (формула обращения Фурье). Имеет место следующая *формула обращения Фурье*:

$$\tilde{\hat{f}}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{i\langle x, \xi\rangle} \hat{f}(\xi)\, d\xi = f(x), \tag{8}$$

$$\text{т. е. } \tilde{\hat{f}} = f \text{ и аналогично } \hat{\tilde{f}} = f. \tag{8'}$$

Отсюда вытекает, в частности, что преобразование Фурье взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает пространство $\mathfrak{S}(R^n)$ *на* себя, и обратное преобразование Фурье представляет собой, таким образом, отображение, обратное преобразованию Фурье.

Доказательство. Справедливо следующее соотношение:

$$\int g(\xi) \hat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi\rangle} d\xi = \int \hat{g}(y) f(x+y)\, dy \quad (f, g \in \mathfrak{S}(R^n)). \tag{9}$$

Действительно, левая часть этого равенства равна

$$\int g(\xi) \left\{ (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i\langle \xi, y\rangle} f(y)\, dy \right\} e^{i\langle x, \xi\rangle} d\xi =$$
$$= (2\pi)^{-n/2} \int \left\{ \int g(\xi) e^{-i\langle \xi, y-x\rangle} d\xi \right\} f(y)\, dy =$$
$$= \int \hat{g}(y-x) f(y)\, dy = \int \hat{g}(y) f(x+y)\, dy.$$

Возьмем теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и заменим $g(\xi)$ функцией $g(\varepsilon\xi)$; тогда

$$(2\pi)^{-n/2} \int e^{-i\langle y, \xi\rangle} g(\varepsilon\xi)\, d\xi = (2\pi)^{-n/2} \varepsilon^{-n} \int g(z) e^{-i\langle y, z/\varepsilon\rangle} dz = \varepsilon^{-n} \hat{g}(y/\varepsilon).$$

Следовательно, в силу (9)

$$\int g(\varepsilon\xi) \hat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi\rangle} d\xi = \int \hat{g}(y) f(x+\varepsilon y)\, dy.$$

Далее, следуя Ф. Риссу, положим $g(x) = e^{-|x|^2/2}$; тогда при $\varepsilon \downarrow 0$ получится равенство

$$g(0) \int \hat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi\rangle} d\xi = f(x) \int \hat{g}(y)\, dy.$$

Как известно,

$$(2\pi)^{-n/2} \int e^{-|x|^2/2} e^{-i\langle y, x\rangle} dx = e^{-|y|^2/2}, \tag{10}$$

$$(2\pi)^{-n/2} \int e^{-|x|^2/2} dx = 1, \tag{10'}$$

т. е. $\int \hat{g}(y)\,dy = (2\pi)^{n/2}$. Кроме того, $g(0) = 1$. Подставляя эти выражения в предыдущее равенство, мы и получаем соотношение (8).

Замечание. Для полноты изложения приведем здесь вывод формулы (10). Напишем очевидное тождество

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-t^2/2} e^{-iut}\,dt = e^{-u^2/2} (2\pi)^{-1/2} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-(t+iu)^2/2}\,dt.$$

Возьмем теперь криволинейный интеграл от функции $e^{-z^2/2}$, которая голоморфна по переменной $z = t + iu$, по замкнутому контуру, состоящему из следующих четырех направленных отрезков, расположенных в указанном порядке:

$$\overrightarrow{-\lambda,\ \lambda}; \qquad \overrightarrow{\lambda,\ \lambda + iv}; \qquad \overrightarrow{\lambda + iv,\ -\lambda + iv}; \qquad \overrightarrow{-\lambda + iv,\ -\lambda},$$

где $v > 0$. По теореме Коши этот интеграл равен нулю. Таким образом,

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-(t+iu)^2/2}\,dt = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-t^2/2}\,dt + \\ + (2\pi)^{-1/2} \int_{v}^{0} e^{-(-\lambda+iu)^2/2}\, i\,du + (2\pi)^{-1/2} \int_{0}^{v} e^{-(\lambda+iu)^2/2} i\,du.$$

Второй и третий члены в правой части стремятся к нулю при $\lambda \to \infty$. Отсюда, используя (10′), мы получаем

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-iut}\,dt = e^{-u^2/2} (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = e^{-u^2/2}.$$

Мы вывели формулу (10) для $n = 1$; случай произвольного n без труда сводится к рассмотренному.

Следствие (равенство Парсеваля[1]). Имеют место следующие равенства:

$$\int \hat{f}(\xi)\, g(\xi)\,d\xi = \int f(x)\,\hat{g}(x)\,dx, \tag{11}$$

$$\int f(\xi)\,\overline{g}(\xi)\,d\xi = \int \tilde{f}(x)\,\overline{\overline{g}}(x)\,dx, \tag{12}$$

$$(\widehat{f * g}) = (2\pi)^{n/2}\hat{f} \cdot \hat{g} \quad \text{и} \quad (2\pi)^{n/2}(\widehat{f \cdot g}) = \hat{f} * \hat{g}, \tag{13}$$

---

[1]) Равенством Парсеваля обычно называют формулу (12). — *Прим. перев.*

где *свертка* $f * g$ функций f и g определяется формулой

$$(f * g)(x) \equiv \int f(x-y)\, g(y)\, dy = \int g(x-y)\, f(y)\, dy. \tag{14}$$

Доказательство. Формула (11) получается из (9), если положить $x=0$. Соотношение (12) получается из (11), так как преобразование Фурье функции $\overline{g}$ равно $\overline{\overline{g}}$. Далее имеем

$$(2\pi)^{-n/2} \int (f * g)(x)\, e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, dx =$$
$$= (2\pi)^{-n/2} \int g(y)\, e^{-i\langle \xi, y\rangle} \left\{ \int f(x-y)\, e^{-i\langle \xi, x-y\rangle}\, dx \right\} dy =$$
$$= (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi)\, \hat{g}(\xi). \tag{15}$$

Функции $\hat{f}$ и $\hat{g}$ принадлежат $\mathfrak{S}(R^n)$, поэтому $\hat{f}\hat{g} \in \mathfrak{S}(R^n)$, т. е. правая часть (15) принадлежит $\mathfrak{S}(R^n)$. Нетрудно заметить, что свертка $f * g$ двух функций из $\mathfrak{S}(R^n)$ тоже принадлежит $\mathfrak{S}(R^n)$. Тем самым первая из формул (13) доказана. Вторая формула (13) выводится аналогично формуле (9) с помощью соотношения (15).

Теорема 2 (формула Пуассона). Пусть $\varphi \in \mathfrak{S}(R^1)$ и $\hat{\varphi} \in \mathfrak{S}(R^1)$ — преобразование Фурье функции φ. Тогда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n). \tag{16}$$

Доказательство. Положим $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n)$. Так как функция $\varphi(x)$ быстро убывает на бесконечности, нетрудно показать, что этот ряд абсолютно сходится, а его сумма $f(x)$ принадлежит C^{∞}, причем $f(x+2\pi) \equiv f(x)$. В частности, ряды в правой и левой части формулы (16) абсолютно сходятся. Остается лишь доказать, что их суммы совпадают.

Коэффициенты Фурье c_k функции $f(x)$ по отношению к полной ортонормальной системе $\left\{(2\pi)^{-1/2} e^{-ikx};\ k=0, \pm 1, \pm 2, \dots\right\}$ гильбертова пространства $L^2(0, 2\pi)$ равны

$$c_k = (2\pi)^{-1/2} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-1/2} \int_0^{2\pi} \varphi(x + 2\pi n)\, e^{-ikx}\, dx =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-1/2} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \varphi(x)\, e^{-ikx}\, dx = \hat{\varphi}(k).$$

Следовательно, поскольку $f \in L^2(0, 2\pi)$,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n) = \underset{s \uparrow \infty}{\text{l. i. m.}} \sum_{k=-s}^{s} \hat{\varphi}(k) e^{ikx}\ ^{1)}.$$

Но $\hat{\varphi}(x) \in \mathfrak{S}(R^n)$, поэтому ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(k) e^{ikx}$ сходится абсолютно. Отсюда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(k) e^{ikx};$$

полагая $x = 0$, мы получаем формулу (16).

Пример. Из формулы (10) получаем

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} e^{-ixy}\, dx = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-ixy/\sqrt{2t}} (2t)^{-1/2}\, dx =$$
$$= (2t)^{-1/2} e^{-y^2/4t}, \quad t > 0.$$

Применяя (16), мы выводим так называемую θ-*формулу*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-4t\pi^2 n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2t)^{-1/2} e^{-n^2/4t}, \quad t > 0. \tag{17}$$

2. Преобразование Фурье медленно растущих обобщенных функций

Определение 1. Непрерывный линейный функционал T, определенный на множестве $\mathfrak{S}(R^n)$, называется *медленно растущей обобщенной функцией (в R^n)*. Совокупность всех медленно растущих обобщенных функций мы обозначим через $\mathfrak{S}(R^n)'$. Сопряженное к $\mathfrak{S}(R^n)$ пространство $\mathfrak{S}(R^n)'$, снабженное сильной топологией сопряженного пространства, представляет собой локально выпуклое линейное топологическое пространство.

Предложение 1. Поскольку $C_0^\infty(R^n)$ содержится как подмножество в пространстве $\mathfrak{S}(R^n)$, а топология пространства $\mathfrak{D}(R^n)$ сильнее, чем топология $\mathfrak{S}(R^n)$, то сужение всякой медленно растущей обобщенной функции на $C_0^\infty(R^n)$ представляет собой обобщенную

---

[1]) Здесь l. i. m. обозначает предел в среднем, т. е.

$$\lim_{s \to \infty} \int_0^{2\pi} \left[f(x) - \sum_{k=-s}^{s} \hat{\varphi}(k) e^{ikx} \right]^2 dx = 0.$$

Это следует из общего результата, установленного в гл. III, § 4, следствие 1, формула (5). — *Прим. перев.*