Следовательно, поскольку $f \in L^2(0,\ 2\pi)$,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n) = \underset{s\uparrow\infty}{\mathrm{l.\ i.\ m.}} \sum_{k=-s}^{s} \hat{\varphi}(k)\, e^{ikx}\ ^{1)}.$$

Но $\hat{\varphi}(x) \in \mathfrak{S}(R^n)$, поэтому ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(k)\, e^{ikx}$ сходится абсолютно. Отсюда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(k)\, e^{ikx};$$

полагая $x = 0$, мы получаем формулу (16).

Пример. Из формулы (10) получаем

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} e^{-ixy}\, dx = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-ixy/\sqrt{2t}} (2t)^{-1/2}\, dx =$$

$$= (2t)^{-1/2} e^{-y^2/4t}, \qquad t > 0.$$

Применяя (16), мы выводим так называемую θ-*формулу*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-4t\pi^2 n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2t)^{-1/2} e^{-n^2/4t}, \qquad t > 0. \tag{17}$$

2. Преобразование Фурье медленно растущих обобщенных функций

Определение 1. Непрерывный линейный функционал T, определенный на множестве $\mathfrak{S}(R^n)$, называется *медленно растущей обобщенной функцией (в R^n)*. Совокупность всех медленно растущих обобщенных функций мы обозначим через $\mathfrak{S}(R^n)'$. Сопряженное к $\mathfrak{S}(R^n)$ пространство $\mathfrak{S}(R^n)'$, снабженное сильной топологией сопряженного пространства, представляет собой локально выпуклое линейное топологическое пространство.

Предложение 1. Поскольку $C_0^\infty(R^n)$ содержится как подмножество в пространстве $\mathfrak{S}(R^n)$, а топология пространства $\mathfrak{D}(R^n)$ сильнее, чем топология $\mathfrak{S}(R^n)$, то сужение всякой медленно растущей обобщенной функции на $C_0^\infty(R^n)$ представляет собой обобщенную

---

[1]) Здесь l. i. m. обозначает предел в среднем, т. е.

$$\lim_{s\to\infty} \int_0^{2\pi} \left[f(x) - \sum_{k=-s}^{s} \hat{\varphi}(k)\, e^{ikx} \right]^2 dx = 0.$$

Это следует из общего результата, установленного в гл. III, § 4, следствие 1, формула (5). — *Прим. перев.*

функцию в R^n. Две различные медленно растущие обобщенные функции, суженные на $C_0^\infty(R^n)$, определяют две различные обобщенные функции в R^n, так как множество $C_0^\infty(R^n)$ плотно в $\mathfrak{S}(R^n)$ по отношению к топологии $\mathfrak{S}(R^n)$. Следовательно, обобщенная функция из $\mathfrak{S}(R^n)'$, равная нулю на $C_0^\infty(R^n)$, должна обратиться в нуль на $\mathfrak{S}(R^n)$. Таким образом,

$$\mathfrak{S}(R^n)' \subseteq \mathfrak{D}(R^n)'. \tag{1}$$

Пример 1. Обобщенная функция, заданная в R^n, носитель которой бикомпактен, принадлежит пространству $\mathfrak{S}(R^n)'$. Поэтому

$$\mathfrak{E}(R^n)' \subseteq \mathfrak{S}(R^n)'. \tag{2}$$

Пример 2. Неотрицательная σ-финитная мера $\mu(dx)$, σ-аддитивная на бэровских множествах пространства R^n, называется *медленно возрастающей мерой*, если для некоторого неотрицательного k

$$\int_{R^n} (1+|x|^2)^{-k} \mu(dx) < \infty. \tag{3}$$

Такая мера μ определяет медленно растущую обобщенную функцию T_μ:

$$T_\mu(\varphi) = \int_{R^n} \varphi(x)\mu(dx), \qquad \varphi \in \mathfrak{S}(R^n). \tag{4}$$

В самом деле, условие $\varphi \in \mathfrak{S}(R^n)$ означает, что $\varphi(x) = O\left((1+|x|^2)^{-k}\right)$ при $|x| \to \infty$.

Пример 3. Как частный случай примера 2 можно рассматривать медленно растущую обобщенную функцию вида

$$T_f(\varphi) = \int_{R^n} \varphi(x) f(x)\,dx, \qquad \varphi \in \mathfrak{S}(R^n), \tag{4'}$$

определяемую произвольной функцией f пространства $L^p(R^n)(p \geqslant 1)$. В самом деле, функция $f \in L^p(R^n)$ порождает медленно возрастающую меру $\mu(dx) = |f(x)|\,dx$; в этом можно убедиться, применяя к интегралу

$$\int_{R^n} (1+|x|^2)^{-k} f(x)\,dx$$

неравенство Гёльдера.

Определение 2. Функция $f \in C^\infty(R^n)$ называется *медленно возрастающей* (при $x \to \infty$), если для всякого дифференциального оператора D^j существует такое неотрицательное целое N, что

$$\lim_{|x| \to \infty} |x|^{-N} |D^j f(x)| = 0. \tag{5}$$

Совокупность всех медленно возрастающих функций мы будем обозначать через $\mathfrak{O}_M(R^n)$. Множество $\mathfrak{O}_M(R^n)$ с алгебраическими операциями сложения функций и умножения их на комплексные числа и топологией, определяемой системой полунорм вида

$$p(f) = p_{h, D^j}(f) = \sup_{x \in R^n} |h(x) D^j f(x)|, \qquad f \in \mathfrak{O}_M(R^n), \tag{6}$$

где $h(x)$ — произвольная функция из $\mathfrak{S}(R^n)$, а D^j — произвольный дифференциальный оператор, образует локально выпуклое линейное топологическое пространство. Применяя формулу Лейбница дифференцирования произведения функций, легко видеть, что $h(x) D^j f(x) \in \mathfrak{S}(R^n)$ и, следовательно, полунормы $p_{h, D^j}(f)$ конечны для каждой функции $f \in \mathfrak{O}_M(R^n)$. Кроме того, если $p_{h, D^j}(f) = 0$ для всех $h \in \mathfrak{S}(R^n)$ и любых операторов D^j, то $f(x) \equiv 0$. Последнее нетрудно установить, если положить $D = I$ и взять $h \in \mathfrak{D}(R^n)$.

Предложение 2. Множество $C_0^\infty(R^n)$ плотно в $\mathfrak{O}_M(R^n)$ в топологии пространства $\mathfrak{O}_M(R^n)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{O}_M(R^n)$. Выберем такую функцию $\psi \in C_0^\infty(R^n)$, что $\psi(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1$. Тогда $f_\varepsilon(x) = f(x)\psi(\varepsilon x) \in C_0^\infty(R_n)$ при любом $\varepsilon > 0$. Как в предложении 3, § 1, гл. VI, нетрудно показать, что $f_\varepsilon(x)$ стремится к $f(x)$ в топологии пространства $\mathfrak{O}_M(R^n)$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Это и доказывает наше предложение.

Предложение 3. Всякая функция $f \in \mathfrak{O}_M(R^n)$ определяет медленно растущую обобщенную функцию

$$T_f(\varphi) = \int_{R^n} f(x)\varphi(x)\,dx, \qquad \varphi \in \mathfrak{S}(R^n). \tag{7}$$

Определение 3. Как и в случае обобщенных функций в R^n, мы можем определить производную медленно растущей обобщенной функции T формулой

$$D^j T(\varphi) = (-1)^{|j|} T(D^j \varphi), \qquad \varphi \in \mathfrak{S}(R^n), \tag{8}$$

так как отображение $\varphi(x) \to D^j\varphi(x)$ пространства $\mathfrak{S}(R^n)$ в себя линейно и непрерывно в топологии $\mathfrak{S}(R^n)$. Можно также определить умножение функции $f \in \mathfrak{O}_M(R^n)$ на обобщенную функцию $T \in \mathfrak{S}(R^n)'$

$$(fT)(\varphi) = T(f\varphi), \qquad \varphi \in \mathfrak{S}(R^n), \tag{9}$$

поскольку отображение $\varphi(x) \to f(x)\varphi(x)$ пространства $\mathfrak{S}(R^n)$ в себя линейно и непрерывно в топологии $\mathfrak{S}(R^n)$.

Преобразование Фурье медленно растущих обобщенных функций

Определение 4. Так как отображение $\varphi(x) \to \hat{\varphi}(x)$ пространства $\mathfrak{S}(R^n)$ на себя линейно и непрерывно в топологии $\mathfrak{S}(R^n)$, мы можем определить *преобразование Фурье* $\hat{T}$ медленно растущей обобщенной функции T как медленно растущую обобщенную функцию вида

$$\hat{T}(\varphi)=T(\hat{\varphi}), \qquad \varphi\in\mathfrak{S}(R^n). \tag{10}$$

Пример 1. Если $f\in L^1(R^n)$, то

$$\hat{T}_f=T_{\hat{f}}, \quad \text{где} \quad \hat{f}(x)=(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}f(\xi)\,d\xi; \tag{11}$$

это получается при помощи изменения порядка интегрирования:

$$\hat{T}_f(\varphi)=\int f(x)\hat{\varphi}(x)\,dx=(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n} f(x)\left\{\int\limits_{R^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\varphi(\xi)\,d\xi\right\}dx.$$

Замечание. Ясно, что определенное таким способом преобразование Фурье медленно растущей обобщенной функции является обобщением обычного преобразования Фурье для функций.

Предложение 4 (формула обращения Фурье). Введем обозначение

$$\check{f}(x)=f(-x). \tag{12}$$

Тогда формулу обращения Фурье из предыдущего § 1 можно записать в виде

$$\hat{\hat{f}}=\check{f}, \qquad f\in\mathfrak{S}(R^n). \tag{13}$$

Следствие 1 (формула обращения Фурье для обобщенных функций). Для медленно растущих обобщенных функций формула обращения имеет следующий вид:

$$\hat{\hat{T}}=\check{T}, \quad \text{где} \quad \check{T}(\varphi)=T(\check{\varphi}). \tag{14}$$

В частности, преобразование $T\to\hat{T}$ линейно отображает пространство $\mathfrak{S}(R^n)'$ на себя.

Доказательство. По определению имеем

$$\hat{\hat{T}}(\varphi)=T(\hat{\hat{\varphi}})=T(\check{\varphi})=\check{T}(\varphi) \quad \text{для всех} \quad \varphi\in\mathfrak{S}(R^n).$$

Следствие 2. Преобразование Фурье $T\to\hat{T}$ и обратное ему преобразование представляют собой линейные отображения пространства $\mathfrak{S}(R^n)'$ на себя, непрерывные по отношению к слабой* топологии $\mathfrak{S}(R^n)'$:

$$\begin{aligned} &\text{если} \quad \lim_{h\to\infty} T_h(\varphi)=T(\varphi) \quad \text{для всех} \quad \varphi\in\mathfrak{S}(R^n),\\ &\text{то} \quad \lim_{h\to\infty} \hat{T}_h(\varphi)=\hat{T}(\varphi) \quad \text{для всех} \quad \varphi\in\mathfrak{S}(R^n). \end{aligned} \tag{15}$$

Обращение преобразования Фурье $T \to \hat{T}$ определяется *обратным преобразованием Фурье* $T \to \tilde{T}$, где

$$\tilde{T}(\varphi) = T(\tilde{\varphi}), \qquad \varphi \in \mathfrak{S}(R^n). \tag{10'}$$

Пример 2. Имеют место формулы[1])

$$\hat{T}_\delta = (2\pi)^{-n/2} T_1, \qquad \hat{T}_1 = (2\pi)^{n/2} T_\delta. \tag{16}$$

Доказательство. Мы имеем $\hat{T}_\delta(\varphi) = T_\delta(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R^n} 1 \cdot \varphi(y)\, dy = (2\pi)^{-n/2} T_1(\varphi)$. Кроме того,

$$T_\delta = \check{T}_\delta = \hat{\hat{T}}_\delta = (2\pi)^{-n/2} \hat{T}_1.$$

Пример 3. Имеем

$$\widehat{\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)} = i x_j \hat{T}, \tag{17}$$

$$(\widehat{i x_j T}) = -\left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial x_j}\right), \tag{18}$$

где x_j — координата в пространстве R^n.

Доказательство. Используя формулу (5), § 1, гл. VI, получаем

$$\widehat{\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)}(\varphi) = \left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)(\hat{\varphi}) = -T\left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_j}\right) = -T(\widehat{-i x_j \varphi(x)}) = T(\widehat{i x_j \varphi}) = (i x_j \hat{T})(\varphi).$$

По формуле (6), § 1, гл. VI, находим

$$(\widehat{i x_j T})(\varphi) = (i x_j T)(\hat{\varphi}) = T(i x_j \hat{\varphi}) = T\left(\widehat{\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}}\right) = \hat{T}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = -\left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial x_j}\right)(\varphi).$$

Теорема Планшереля. Если $f \in L^2(R^n)$, то преобразование Фурье $\hat{T}_f$ обобщенной функции T_f определяется некоторой функцией $\hat{f} \in L^2(R^n)$, т. е.

$$\hat{T}_f = T_{\hat{f}}, \quad \text{где} \quad \hat{f} \in L^2(R^n), \tag{19}$$

и

$$\|\hat{f}\| = \left(\int\limits_{R^n} |\hat{f}(x)|^2\, dx\right)^{1/2} = \left(\int\limits_{R^n} |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2} = \|f\|. \tag{20}$$

---

[1]) Здесь T_1 обозначает регулярную обобщенную функцию T_f с $f \equiv 1$. — *Прим. перев.*

Доказательство. Из формулы (12) предыдущего § 1 следует, что $\|\hat{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Применяя далее неравенство Шварца, получаем

$$|\hat{T}_f(\varphi)| = |T_f(\hat{\varphi})| = \left| \int_{R^n} f(x)\,\hat{\varphi}(x)\,dx \right| \leqslant \|f\|\,\|\hat{\varphi}\| = \|f\| \cdot \|\varphi\|. \tag{21}$$

По теореме Рисса о представлении функционалов в пространстве $L^2(R^n)$ должна существовать единственная функция $\hat{f} \in L^2(R^n)$, такая, что

$$\hat{T}_f(\varphi) = \int_{R^n} \varphi(x)\,\hat{f}(x)\,dx = T_{\hat{f}}(\varphi),$$

а это означает, что

$$\int_{R^n} \hat{f}(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{R^n} f(x)\,\hat{\varphi}(x)\,dx \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathfrak{S}(R^n). \tag{22}$$

Кроме того, поскольку $\mathfrak{S}(R^n)$ плотно в пространстве $L^2(R^n)$ в топологии $L^2(R^n)$, из неравенства (21) следует, что $\|f\| \geqslant \|\hat{f}\|$. Таким образом, $\|\hat{\hat{f}}\| \leqslant \|\hat{f}\| \leqslant \|f\|$. Но, с другой стороны, из (13) и (22) вытекает, что

$$\int_{R^n} \hat{\hat{f}}(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{R^n} \hat{f}(x)\,\hat{\varphi}(x)\,dx = \int_{R^n} f(-x)\,\varphi(x)\,dx$$
$$\text{для всех} \quad \varphi \in \mathfrak{S}(R^n),$$

и поэтому почти всюду выполняется равенство

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x) = \check{f}(x). \tag{23}$$

Следовательно, $\|\hat{\hat{f}}\| = \|f\|$. Отсюда, принимая во внимание неравенство $\|\hat{\hat{f}}\| \leqslant \|\hat{f}\| \leqslant \|f\|$, мы получаем формулу (20).

Определение 5. Функцию $\hat{f}(x) \in L^2(R^n)$, построенную при доказательстве теоремы Планшереля, мы назовем *преобразованием Фурье* функции $f(x) \in L^2(R^n)$.

Следствие 1. Для любой функции $f \in L^2(R^n)$

$$\hat{f}(x) = \underset{h \uparrow \infty}{\text{l. i. m.}}\,(2\pi)^{-n/2} \int_{|x| \leqslant h} e^{-i\langle x,\,y\rangle} f(y)\,dy. \tag{24}$$

Доказательство. Положим

$$f_h(x) = f(x) \quad \text{при } |x| \leqslant h \quad \text{и} \quad f_h(x) = 0 \quad \text{при } |x| > h.$$

Тогда $\lim\limits_{h\to\infty} \| f_h - f \| = 0$, и поэтому по формуле (20) $\lim\limits_{h\to\infty} \| \hat{f}_h - \hat{f} \| = 0$. Последнее означает, что $\hat{f}(x) = \underset{h\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\, \hat{f}_h(x)$ почти всюду. По формуле (22)

$$\int\limits_{R^n} \hat{f}_h(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{R^n} f_h(x)\hat{\varphi}(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{|x|\leqslant h} f(x)\left\{(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n} e^{-i\langle x,\, y\rangle}\varphi(y)\,dy\right\}dx.$$

Из неравенства Шварца следует, что функция $f_h(x)$ интегрируема в области $|x| \leqslant h$, поэтому, изменяя порядок интегрирования, мы находим, что

$$\int\limits_{R^n} \hat{f}_h(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{R^n} (2\pi)^{-n/2}\left\{\int\limits_{|x|\leqslant h} e^{-i\langle x,\, y\rangle} f(x)\,dx\right\}\varphi(y)\,dy.$$

Следовательно, почти всюду $\hat{f}_h(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{|x|\leqslant h} e^{-i\langle x,\, y\rangle} f(y)\,dy$, откуда получается формула (24).

Следствие 2. Преобразование Фурье $f \to \hat{f}$ отображает пространство $L^2(R^n)$ на себя взаимно однозначно, и при этом

$$(f,\ g) = (\hat{f},\ \hat{g}) \quad \text{для всех} \quad f,\ g \in L^2(R^n). \tag{25}$$

Доказательство. Обратное преобразование Фурье $f \to \tilde{f}$ для функций из $L^2(R^n)$ определяется формулой

$$\tilde{f}(x) = \underset{h\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\,(2\pi)^{-n/2} \int\limits_{|y|\leqslant h} e^{i\langle x,\, y\rangle} f(y)\,dy; \tag{26}$$

оно отображает $L^2(R^n)$ в себя так, что $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. Ясно, что отображение $f \to \tilde{f}$ обратно отображению $f \to \hat{f}$. Отсюда следует, что преобразование Фурье $f \to \hat{f}$ действительно отображает пространство $L^2(R^n)$ на себя взаимно однозначно и сохраняет норму.

Используя равенство

$$(x,\ y) = 4^{-1}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) + 4^{-1}i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$$

и учитывая линейность преобразования Фурье, мы получаем (25).

Теорема Парсеваля для преобразования Фурье обобщенных функций. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — функции из $L^2(R^n)$, и пусть $\hat{f}_1(u)$ и $\hat{f}_2(u)$ — их преобразования Фурье. Тогда

$$\int\limits_{R^n} \hat{f}_1(u)\hat{f}_2(u)\,du = \int\limits_{R^n} f_1(x) f_2(-x)\,dx, \tag{27}$$

откуда

$$\int\limits_{R^n} \hat{f}_1(u)\hat{f}_2(u)e^{i\langle u, x\rangle}dx = \int\limits_{R^n} f_1(y)f_2(x-y)dy. \tag{28}$$

Таким образом, если произведение $\hat{f}_1(u)\hat{f}_2(u)$, так же как и оба сомножителя, принадлежит $L^2(R^n)$, то оно является преобразованием Фурье выражения

$$(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n} f_1(y)f_2(x-y)dy. \tag{29}$$

Последнее утверждение справедливо и в том случае, если допустить, что функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ и (29) принадлежат $L^2(R^n)$.

Доказательство. Нетрудно заметить, что

$$(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n} \overline{f_2(-x)}\,e^{-i\langle u, x\rangle}dx = \overline{\hat{f}_2(u)}.$$

Отсюда, используя (25), мы получаем (27). Рассматривая выражение $\overline{f_2(x-y)}$ как функцию переменной y, зависящую от параметра x, мы видим, что преобразование Фурье этой функции равно произведению $\overline{\hat{f}_2(u)}\,e^{i\langle u, x\rangle}$, также зависящему от параметра x. Отсюда, используя (25), мы получаем (28). Остальная часть утверждения вытекает из (28), так как $\hat{\hat{f}} = f$.

Отрицательная норма. В главе I, § 9, было приведено определение пространства Соболева $W^{k,2}(\Omega)$. Пусть $f(x) \in W^{k,2}(R^n)$. Поскольку $f(x) \in L^2(R^n)$, выражение $|f(x)|\,dx$ определяет в пространстве R^n медленно возрастающую меру. Это позволяет определить преобразование Фурье $\hat{T}_f$ медленно растущей обобщенной функции T_f. По формуле (17)

$$\widehat{D^\alpha T_f} = (i)^{|\alpha|}\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}\hat{T}_f\,.$$

Согласно определению пространства $W^{k,2}(R^n)$, $D^\alpha T_f \in L^2(R^n)$ при всех $|\alpha| \leqslant k$[1]). Поэтому, применяя теорему Планшереля, доказанную для функций из $L^2(R^n)$, мы получаем

$$\|\widehat{D^\alpha T_f}\|_0 = \|D^\alpha T_f\|_0, \quad \text{где } \|\ \|_0 \text{ — норма в пространстве } L^2(R^n).$$

---

[1]) Запись $D^\alpha T_f \in L^2(R^n)$ (и другие подобные ей) надо понимать в том смысле, что $D^\alpha T_f$ — регулярный функционал вида T_ψ, где $\psi \in L^2(R^n)$ (ясно, что здесь ψ — обобщенная производная $D^\alpha f$). — *Прим. перев.*

Следовательно, $(1+|x|^2)^{k/2}\hat{T}_f \in L^2(R^n)$, и поэтому нетрудно показать, что норма $\|f\|_k = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_{R^n} |D^\alpha T_f|^2\,dx\right)^{1/2}$ эквивалентна норме

$$\left\|(1+|x|^2)^{k/2}\hat{T}_f\right\|_0 = \|f\|'_k \tag{30}$$

в том смысле, что существуют две положительные постоянные c_1 и c_2, для которых

$$c_1 \leqslant \|f\|_k / \|f\|'_k \leqslant c_2 \quad \text{при всех } f \in W^{k,2}(R^n).$$

Таким образом, мы можем перенормировать пространство $W^{k,2}(R^n)$, введя норму $\|f\|'_k$, и пространство $W^{k,2}(R^n)$ можно определить как совокупность всех функций $f \in L^2(R^n)$ с конечной нормой $\|f\|'_k$. Преимущество такого определения состоит в том, что теперь можно рассматривать также отрицательные показатели k. Тогда, как и в случае пространства $L^2(R^n)$ с обычной мерой Лебега dx, сопряженным к перенормированному таким способом пространству $W^{k,2}(R^n)$ является пространство $W^{-k,2}(R^n)$ с нормой $\|f\|'_{-k}$. Это заметил Л. Шварц [5] еще до того, как П. Лакс [2] ввел понятие отрицательной нормы.

3. *Свертки*

Определим *свертку* двух функций $f,\ g \in C(R^n)$, одна из которых обладает бикомпактным носителем, формулой

$$(f * g)(x) = \int_{R^n} f(x-y)\,g(y)\,dy = \int_{R^n} f(y)\,g(x-y)\,dy = (g * f)(x) \tag{1}$$

(ср. со случаем, когда $f,\ g \in \mathfrak{S}(R^n)$, гл. VI, § 1). По аналогии с формулой (1) назовем *сверткой* обобщенной функции $T \in \mathfrak{D}(R^n)'$ и функции $\varphi \in \mathfrak{D}(R^n)$ (или обобщенной функции $T \in \mathfrak{E}(R^n)'$ и функции $\varphi \in \mathfrak{E}(R^n)$) выражение

$$(T * \varphi)(x) = T_{[y]}(\varphi(x-y))\,^{1)}, \tag{2}$$

где символ $T_{[y]}$ указывает на то, что T применяется к основной функции переменной y.

Предложение 1. Мы имеем $(T * \varphi)(x) \in C^\infty(R^n)$ и $\operatorname{supp}(T * \varphi) \subseteq \operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(\varphi)$, т. е.

$$\operatorname{supp}(T * \varphi) \subseteq \{w \in R^n;\ w = x + y,\ x \in \operatorname{supp}(T),\ y \in \operatorname{supp}(\varphi)\}.$$

---

[1]) Отметим для дальнейшего, что если $T = T_\psi$ — регулярная обобщенная функция, то $(T * \varphi)(x) = (T_\psi * \varphi)(x) = T_{\psi\,[y]}[\varphi(x-y)] = \int \psi(y)\varphi(x-y)\,dy = (\psi * \varphi)(x)$. — *Прим. перев.*