Следовательно, $(1+|x|^2)^{k/2}\hat{T}_f \in L^2(R^n)$, и поэтому нетрудно показать, что норма $\|f\|_k = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \int_{R^n} |D^\alpha T_f|^2\,dx\right)^{1/2}$ эквивалентна норме

$$\|(1+|x|^2)^{k/2}\hat{T}_f\|_0 = \|f\|'_k \tag{30}$$

в том смысле, что существуют две положительные постоянные c_1 и c_2, для которых

$$c_1 \leqslant \|f\|_k/\|f\|'_k \leqslant c_2 \quad \text{при всех } f \in W^{k,2}(R^n).$$

Таким образом, мы можем перенормировать пространство $W^{k,2}(R^n)$, введя норму $\|f\|'_k$, и пространство $W^{k,2}(R^n)$ можно определить как совокупность всех функций $f \in L^2(R^n)$ с конечной нормой $\|f\|'_k$. Преимущество такого определения состоит в том, что теперь можно рассматривать также отрицательные показатели k. Тогда, как и в случае пространства $L^2(R^n)$ с обычной мерой Лебега dx, сопряженным к перенормированному таким способом пространству $W^{k,2}(R^n)$ является пространство $W^{-k,2}(R^n)$ с нормой $\|f\|'_{-k}$. Это заметил Л. Шварц [5] еще до того, как П. Лакс [2] ввел понятие отрицательной нормы.

3. Свертки

Определим *свертку* двух функций $f,\ g \in C(R^n)$, одна из которых обладает бикомпактным носителем, формулой

$$(f*g)(x) = \int_{R^n} f(x-y)\,g(y)\,dy = \int_{R^n} f(y)\,g(x-y)\,dy = (g*f)(x) \tag{1}$$

(ср. со случаем, когда $f,\ g \in \mathfrak{S}(R^n)$, гл. VI, § 1). По аналогии с формулой (1) назовем *сверткой* обобщенной функции $T \in \mathfrak{D}(R^n)'$ и функции $\varphi \in \mathfrak{D}(R^n)$ (или обобщенной функции $T \in \mathfrak{E}(R^n)'$ и функции $\varphi \in \mathfrak{E}(R^n)$) выражение

$$(T*\varphi)(x) = T_{[y]}(\varphi(x-y))\,^{1)}, \tag{2}$$

где символ $T_{[y]}$ указывает на то, что T применяется к основной функции переменной y.

Предложение 1. Мы имеем $(T*\varphi)(x) \in C^\infty(R^n)$ и $\operatorname{supp}(T*\varphi) \subseteq \operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(\varphi)$, т. е.

$$\operatorname{supp}(T*\varphi) \subseteq \{w \in R^n;\ w = x+y,\ x \in \operatorname{supp}(T),\ y \in \operatorname{supp}(\varphi)\}.$$

---

1) Отметим для дальнейшего, что если $T = T_\psi$ — регулярная обобщенная функция, то $(T*\varphi)(x) = (T_\psi * \varphi)(x) = T_{\psi\,[y]}[\varphi(x-y)] = \int \psi(y)\varphi(x-y)\,dy = (\psi*\varphi)(x)$. — *Прим. перев.*

Кроме того,
$$D^{\alpha}(T*\varphi)=T*(D^{\alpha}\varphi)=(D^{\alpha}T)*\varphi. \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть $\varphi\in\mathfrak{D}(R^n)$ (или $\varphi\in\mathfrak{E}(R^n)$). Если $\lim\limits_{h\to\infty}x^h=x$, то $\lim\limits_{h\to\infty}\varphi(x^h-y)=\varphi(x-y)$ в пространстве $\mathfrak{D}(R^n)$ функций независимой переменной y (или в пространстве $\mathfrak{E}(R^n)$). Следовательно, обобщенная функция $T_{[y]}(\varphi(x-y))=(T*\varphi)(x)$ непрерывна по x. Отношение включения для носителей, указанное в формулировке предложения, вытекает из того, что $T_{[y]}(\varphi(x-y))=0$, если только носители T и $\varphi(x-y)$ как функции от y не пересекаются. Пусть e_j — единичный вектор пространства R^n вдоль оси x_j; рассмотрим выражение
$$T_{[y]}((\varphi(x+he_j-y)-\varphi(x-y))/h).$$

При $h\to 0$ функция, стоящая под знаком функционала, сходится как функция от y в пространстве $\mathfrak{D}(R^n)$ (или в пространстве $\mathfrak{E}(R^n)$) к $(\partial\varphi/\partial x_j)(x-y)$. Тем самым мы показали, что
$$\frac{\partial}{\partial x_j}(T*\varphi)(x)=\left(T*\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)(x).$$
Наконец,
$$\left(T*\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)(x)=T_{[y]}\left(-\frac{\partial\varphi(x-y)}{\partial y_j}\right)=\frac{\partial T_{[y]}}{\partial y_j}(\varphi(x-y))=\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}*\varphi\right)(x),$$
откуда и следует формула (3).

Предложение 2. Если φ и ψ принадлежат пространству $\mathfrak{D}(R^n)$ и $T\in\mathfrak{D}(R^n)'$ (или $\varphi\in\mathfrak{E}(R^n)$, $\psi\in\mathfrak{D}(R^n)$ и $T\in\mathfrak{E}(R^n)'$), то
$$(T*\varphi)*\psi=T*(\varphi*\psi). \qquad (4)$$

Доказательство. Аппроксимируем функцию $(\varphi*\psi)(x)$ суммой Римана вида
$$f_h(x)=h^{-n}\sum_k\varphi(x-kh)\psi(kh),$$
где $h>0$, а k пробегает все точки пространства R^n с целыми координатами. Тогда при $h\downarrow 0$ функция
$$D^{\alpha}f_h(x)=h^{-n}\sum_k D^{\alpha}\varphi(x-kh)\psi(kh),$$
где D^{α} — произвольный дифференциальный оператор, сходится равномерно по x на всяком бикомпактном множестве точек x к функции $((D^{\alpha}\varphi)*\psi)(x)=(D^{\alpha}(\varphi*\psi))(x)$. Поэтому, учитывая, что T — непрерывный линейный функционал, мы получаем
$$(T*(\varphi*\psi))(x)=\lim_{h\downarrow 0}(T*f_h)(x)=$$
$$=\lim_{h\downarrow 0}h^{-n}\sum_k(T*\varphi)(x-kh)\psi(kh)=((T*\varphi)*\psi)(x),$$
что и требовалось доказать.

Определение. Пусть функция $\varphi \in \mathfrak{D}(R^n)$ неотрицательна, $\int\limits_{R^n} \varphi\, dx = 1$ и $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \{x \in R^n;\ |x| \leqslant 1\}$. В качестве примера такой функции можно взять

$$\varphi = \exp\left\{\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) \Big/ \int\limits_{|x|<1} \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) dx\right\} \text{ при } |x| < 1,$$

$$\text{и } \varphi(x) = 0 \quad \text{при} \quad |x| \geqslant 1.$$

Выражение вида $\varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)\,(\varepsilon > 0)$ мы обозначим через $\varphi_\varepsilon(x)$ и назовем свертку $T * \varphi_\varepsilon$ *усреднением* для $T \in \mathfrak{D}(R^n)'$ (или $T \in \mathfrak{E}(R^n)'$).

Теорема 1. Пусть $T \in \mathfrak{D}(R^n)'$ (или $T \in \mathfrak{E}(R^n)'$). Тогда $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} (T * \varphi_\varepsilon) = T$ в слабой* топологии пространства $\mathfrak{D}(R^n)'$ (или $\mathfrak{E}(R^n)'$).

Для доказательства нам понадобится

Лемма. Для любой функции $\psi \in \mathfrak{D}(R^n)$ (или $\psi \in \mathfrak{E}(R^n)$) в пространстве $\mathfrak{D}(R^n)$ (или $\mathfrak{E}(R^n)$) справедливо соотношение $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \psi * \varphi_\varepsilon = \psi$.

Доказательство. Заметим, что

$$\operatorname{supp}(\psi * \varphi_\varepsilon) \subseteq \operatorname{supp}(\psi) + \operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon) = \operatorname{supp}(\psi) + \varepsilon\,^{1)}.$$

По формуле (3) имеем $D^\alpha(\psi * \varphi_\varepsilon) = (D^\alpha\psi) * \varphi_\varepsilon$. Следовательно, мы должны показать, что $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} (\psi * \varphi_\varepsilon)(x) = \psi(x)$ равномерно на всяком бикомпактном множестве точек x. Поскольку $\int \varphi_\varepsilon(y)\, dy = 1$, имеем

$$(\psi * \varphi_\varepsilon)(x) - \psi(x) = \int\limits_{R^n} \{\psi(x-y) - \psi(x)\}\, \varphi_\varepsilon(y)\, dy.$$

Отсюда получается утверждение леммы, так как $\varphi_\varepsilon(x) \geqslant 0$ $\int\limits_{R^n} \varphi_\varepsilon(y)\, dy = 1$ и функция $\psi(x)$ равномерно непрерывна на всяком бикомпактном множестве точек x.

Доказательство теоремы 1. Так как $\check{\psi}(x) = \psi(-x)$, то

$$T(\psi) = (T * \check{\psi})(0). \tag{5}$$

Поэтому мы должны теперь показать, что $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} ((T * \varphi_\varepsilon) * \check{\psi})(0) = (T * \check{\psi})(0)$. Но, согласно соотношению (4), $(T * \varphi_\varepsilon) * \check{\psi} = T * (\varphi_\varepsilon * \check{\psi})$. Следовательно, по формуле (5) $(T * \varphi_\varepsilon)(\psi) = T((\varphi_\varepsilon * \check{\psi})\check{\ })$. Применяя теперь доказанную выше лемму, находим, что $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} (T * \varphi_\varepsilon)(\psi) = T((\check{\psi})\check{\ }) = T(\psi)$, что и требовалось доказать.

---

1) Эта запись означает, что $\operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon) = \{y \in R^n, |y| \leqslant \varepsilon\}$. — *Прим. перев.*

Докажем теперь теорему, характеризующую операцию свертки.

Теорема 2 (Л. Шварц). Пусть L — непрерывное линейное отображение пространства $\mathfrak{D}(R^n)$ в $\mathfrak{E}(R^n)$, удовлетворяющее условию [1])

$$L\tau_h\varphi = \tau_h L\varphi \quad \text{для всех} \quad h \in R^n \quad \text{и} \quad \varphi \in \mathfrak{D}(R^n), \tag{6}$$

где τ_h — оператор сдвига, определяемый формулой

$$\tau_h\varphi(x) = \varphi(x - h). \tag{7}$$

Тогда существует единственным образом определенная обобщенная функция $T \in \mathfrak{D}(R^n)'$, такая, что $L\varphi = T * \varphi$. Обратно, для всякой обобщенной функции $T \in \mathfrak{D}(R^n)'$ формула $L\varphi = T * \varphi$ определяет непрерывное линейное отображение L пространства $\mathfrak{D}(R^n)$ в $\mathfrak{E}(R^n)$, удовлетворяющее условию (6).

Доказательство. Так как преобразование $\varphi \to \check{\varphi}$ отображает пространство $\mathfrak{D}(R^n)$ линейно и непрерывно на себя, то линейное отображение $T: \check{\varphi} \to (L\varphi)(0)$ определяет обобщенную функцию $T \in \mathfrak{D}(R^n)'$. Следовательно, по формуле (5) $(L\varphi)(0) = T(\check{\varphi}) = (T * \varphi)(0)$. Если здесь заменить φ на $\tau_h\varphi$ и использовать условие (6), то получится соотношение $(L\varphi)(h) = (T * \varphi)(h)$, которое и нужно было вывести. Обратное утверждение теоремы без труда доказывается с помощью определения (2), предложения 1 и свойства (5).

Следствие. Пусть $T_1 \in \mathfrak{D}(R^n)'$ и $T_2 \in \mathfrak{E}(R^n)'$. Тогда свертку $T_1 * T_2$ можно определить как обобщенную функцию при помощи непрерывного линейного отображения L пространства $\mathfrak{D}(R^n)$ в $\mathfrak{E}(R^n)$ следующим образом:

$$(T_1 * T_2) * \varphi = L(\varphi) = T_1 * (T_2 * \varphi), \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(R^n). \tag{8}$$

Доказательство. Преобразование $\varphi \to T_2 * \varphi$ отображает непрерывно и линейно пространство $\mathfrak{D}(R^n)$ в себя, потому что носитель $\operatorname{supp}(T_2)$ бикомпактен. Следовательно, оператор $\varphi \to T_1 * (T_2 * \varphi)$ линейно и непрерывно отображает $\mathfrak{D}(R^n)$ в $\mathfrak{E}(R^n)$. Нетрудно проверить, что L удовлетворяет условию (6).

Замечание. Из (4) видно, что если обобщенная функция T_2 определяется некоторой функцией из $\mathfrak{D}(R^n)$, то определение свертки $T_1 * T_2$ согласуется с приведенными ранее определениями.

Заметим, что свертку $T_1 * T_2$ можно определить также формулой

$$(T_1 * T_2)(\varphi) = (T_{1(x)} \times T_{2(y)})(\varphi(x + y)), \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(R^n), \tag{8'}$$

где $T_{1(x)} \times T_{2(y)}$ — прямое произведение T_1 и T_2. По этому поводу см. Л. Шварц [1].

---

[1]) О дифференциальных операторах, инвариантных относительно сдвига, см. Хёрмандер [7*]. — *Прим. перев.*

Теорема 3. Пусть $T_1 \in \mathfrak{D}(R^n)'$ и $T_2 \in \mathfrak{E}(R^n)'$. Тогда при помощи непрерывного линейного отображения L

$$\mathfrak{D}(R^n) \ni \varphi \to T_2 * (T_1 * \varphi) \in \mathfrak{E}(R^n)$$

можно определить другую „свертку" $T_2 \boxed{*} T_1$ формулой

$$(T_2 \boxed{*} T_1) * \varphi = L(\varphi), \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(R^n).$$

Можно доказать, что операция свертки коммутативна в том смысле, что $T_2 \boxed{*} T_1 = T_1 * T_2$.

Доказательство. Преобразование $\varphi \to T_1 * \varphi$ отображает непрерывно и линейно пространство $\mathfrak{D}(R^n)$ в $\mathfrak{E}(R^n)$. Поэтому преобразование $\varphi \to T_2 * (T_1 * \varphi)$ определяет непрерывное линейное отображение пространства $\mathfrak{D}(R^n)$ в $\mathfrak{E}(R^n)$. Таким образом, свертка $T_2 \boxed{*} T_1$ определена корректно. Далее, для любых двух функций φ_1, $\varphi_2 \in \mathfrak{D}(R^n)$, учитывая предложение 2, мы получаем равенства

$$\begin{aligned}(T_1 * T_2) * (\varphi_1 * \varphi_2) &= T_1 * (T_2 * (\varphi_1 * \varphi_2)) = T_1 * ((T_2 * \varphi_1) * \varphi_2) = \\ &= T_1 * (\varphi_2 * (T_2 * \varphi_1)) = (T_1 * \varphi_2) * (T_2 * \varphi_1),\end{aligned}$$

так как операция свертки функций коммутативна и множество $\operatorname{supp}(T_2 * \varphi_1)$ бикомпактно, поскольку $T_2 \in \mathfrak{E}(R^n)'$. Аналогично

$$\begin{aligned}(T_2 \boxed{*} T_1) * (\varphi_1 * \varphi_2) &= T_2 * (T_1 * (\varphi_1 * \varphi_2)) = T_2 * ((T_1 * \varphi_2) * \varphi_1) = \\ &= T_2 * (\varphi_1 * (T_1 * \varphi_2)) = (T_2 * \varphi_1) * (T_1 * \varphi_2).\end{aligned}$$

Таким образом, $(T_1 * T_2) * (\varphi_1 * \varphi_2) = (T_2 \boxed{*} T_1) * (\varphi_1 * \varphi_2)$. Отсюда, согласно (5) и доказанной ранее лемме, следует, что $(T_1 * T_2)(\varphi) = (T_2 \boxed{*} T_1)(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathfrak{D}(R^n)$, а это и означает, что $(T_1 * T_2) = (T_2 \boxed{*} T_1)$.

Следствие. Если по крайней мере две из трех обобщенных функций T_1, T_2, T_3 имеют бикомпактные носители, то

$$T_1 * (T_2 * T_3) = (T_1 * T_2) * T_3. \tag{9}$$

Кроме того,

$$D^\alpha (T_1 * T_2) = \left(D^\alpha T_1\right) * T_2 = T_1 * \left(D^\alpha T_2\right). \tag{10}$$

Доказательство. Из определения свертки $T_1 * T_2$ и свойства (5) получаем

$$\begin{aligned}(T_1 * (T_2 * T_3))(\varphi) &= ((T_1 * (T_2 * T_3)) * \check{\varphi})(0) = \\ &= (T_1 * ((T_2 * T_3) * \check{\varphi}))(0) = (T_1 * (T_2 * (T_3 * \check{\varphi})))(0);\end{aligned}$$

аналогично

$$((T_1 * T_2) * T_3)(\varphi) = (T_1 * (T_2 * (T_3 * \check{\varphi})))(0),$$

откуда следует (9).

Правило дифференцирования (10) доказывается следующим образом. Используя равенство (3), находим, что

$$(D^\alpha T_\delta) * \varphi = T_\delta * (D^\alpha \varphi) = D^\alpha (T_\delta * \varphi) = D^\alpha \varphi, \tag{11}$$

откуда

$$(D^\alpha T) * \varphi = T * (D^\alpha \varphi) = T * ((D^\alpha T_\delta) * \varphi) = (T * D^\alpha T_\delta) * \varphi,$$

т. е. в силу (5)

$$D^\alpha T = (D^\alpha T_\delta) * T. \tag{12}$$

Теперь, используя свойства коммутативности (теорема 3) и ассоциативности (9), мы и выводим требуемое равенство

$$D^\alpha (T_1 * T_2) = (D^\alpha T_\delta) * (T_1 * T_2) = ((D^\alpha T_\delta) * T_1) * T_2 = (D^\alpha T_1) * T_2 =$$
$$= (D^\alpha T_\delta) * (T_2 * T_1) = ((D^\alpha T_\delta) * T_2) * T_1 = (D^\alpha T_2) * T_1.$$

Преобразование Фурье свертки. Докажем сначала одну теорему, уточнением которой служит теорема Пэли — Винера в следующем параграфе.

Теорема 4. Преобразование Фурье обобщенной функции $T \in \mathfrak{E}(R^n)'$ определяется функцией

$$\hat{T}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} T_{[x]}\left(e^{-i\langle x, \xi\rangle}\right). \tag{13}$$

Доказательство. При $\varepsilon \downarrow 0$ обобщенная функция $T_\varepsilon = T * \varphi_\varepsilon$ стремится к T в слабой* топологии пространства $\mathfrak{E}(R^n)'$, и тем более в слабой топологии $\mathfrak{S}(R^n)'$. Это следует из доказанной ранее леммы и равенства

$$(T * \varphi_\varepsilon)(\psi) = (T * (\varphi_\varepsilon * \check{\psi}))(0) = T_{[x]}((\varphi_\varepsilon * \check{\psi})(-x)).$$

Так как преобразование Фурье непрерывно в слабой* топологии пространства $\mathfrak{S}(R^n)'$, то $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} (\widehat{T * \varphi_\varepsilon}) = \hat{T}$ в слабой* топологии $\mathfrak{S}(R^n)'$. Таким образом, для обобщенной функции, определяемой функцией $(T * \varphi_\varepsilon)(x)$, формула (13) очевидна. Следовательно,

$$(2\pi)^{n/2} (\widehat{T * \varphi_\varepsilon})(\xi) = (T * \varphi_\varepsilon)_{[x]}\left(e^{-i\langle x, \xi\rangle}\right);$$

в силу (5) правая часть равна $(T_{[x]} * (\varphi_\varepsilon * e^{-i\langle x, \xi\rangle}))(0) = T_{[x]}(\check{\varphi}_\varepsilon * e^{-i\langle x, \xi\rangle})$. Последнее выражение при $\varepsilon \downarrow 0$ стремится к $T_{[x]}(e^{i\langle x, \xi\rangle})$ равномерно по ξ на всяком ограниченном множестве точек ξ комплексного n-мерного пространства. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Если свертка обобщенной функции $T \in \mathfrak{S}(R^n)'$ с функцией $\varphi \in \mathfrak{S}(R^n)$ определена соотношением $(T * \varphi)(x) = T_{[y]}(\varphi(x - y))$, то линейное отображение $L: \varphi \to T * \varphi$ пространства $\mathfrak{S}(R^n)$ в $\mathfrak{E}(R^n)$ характеризуется непрерывностью и инвариантностью относительно сдвига: $\tau_h L = L \tau_h$.

Доказательство. Теорема доказывается аналогично теореме 2.

Теорема 6. Если $T \in \mathfrak{S}(R^n)'$ и $\varphi \in \mathfrak{S}(R^n)$, то

$$\widehat{(T * \varphi)} = (2\pi)^{n/2} \hat{\varphi} \hat{T}. \tag{14}$$

Если $T_1 \in \mathfrak{S}(R^n)'$ и $T_2 \in \mathfrak{E}(R^n)'$, то

$$\widehat{(T_1 * T_2)} = (2\pi)^{n/2} \hat{T}_2 \cdot \hat{T}_1; \tag{15}$$

последнее имеет смысл, так как по теореме 4 обобщенная функция $\hat{T}_2$ регулярна и определяется некоторой функцией.

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathfrak{S}(R^n)$. Тогда преобразование Фурье функции $\hat{\varphi} \cdot \psi$ равно (формула (13), гл. VI, § 1) выражению $(2\pi)^{-n/2} \hat{\hat{\varphi}} * \hat{\psi} = (2\pi)^{-n/2} \check{\varphi} * \hat{\psi}$. Поэтому

$$\widehat{(T * \varphi)}(\psi) = (T * \varphi)(\hat{\psi}) = ((T * \varphi) * \overset{\times}{\varphi})(0) = (T * (\varphi * \overset{\times}{\hat{\psi}}))(0) =$$
$$= T((\varphi * \overset{\times}{\hat{\psi}})^{\vee}) = T(\check{\varphi} * \hat{\psi}) = T\left((2\pi)^{n/2} (\hat{\varphi} \cdot \psi)^{\wedge}\right) =$$
$$= (2\pi)^{n/2} \hat{T}(\hat{\varphi}\psi) = (2\pi)^{n/2} \hat{\varphi}\hat{T}(\psi),$$

откуда и следует (14).

Пусть ψ_ε—усреднение $T_2 * \varphi_\varepsilon$. Тогда преобразование Фурье свертки $T_1 * \psi_\varepsilon = T_1 * (T_2 * \varphi_\varepsilon) = (T_1 * T_2) * \varphi_\varepsilon$ равно, согласно формуле (14), выражению

$$(2\pi)^{n/2} \hat{T}_1 \cdot \hat{\psi}_\varepsilon = (2\pi)^{n/2} \hat{T}_1 \cdot (2\pi)^{n/2} \hat{T}_2 \cdot \hat{\varphi}_\varepsilon = (2\pi)^{n/2} \widehat{(T_1 * T_2)} \cdot \hat{\varphi}_\varepsilon.$$

Полагая $\varepsilon \downarrow 0$ и учитывая, что $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \hat{\varphi}_\varepsilon(x) = 1$, мы получаем (15).

4. Теоремы Пэли — Винера. Преобразование Лапласа

Для преобразования Фурье функций класса $C_0^\infty(R^n)$ справедлива

Теорема Пэли — Винера для функций. Целая голоморфная функция $F(\zeta) = F(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ от n комплексных переменных $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ является *преобразованием Фурье — Лапласа*

$$F(\zeta) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} e^{-i\langle\zeta, x\rangle} f(x)\, dx \tag{1}$$

функции $f \in C_0^\infty(R^n)$, носитель которой $\operatorname{supp}(f)$ содержится в шаре $|x| \leqslant B$ пространства R^n, тогда и только тогда, когда для любого целого N существует положительная постоянная C_N, такая, что

$$|F(\zeta)| \leqslant C_N (1 + |\zeta|)^{-N} e^{B|\operatorname{Im} \zeta|}. \tag{2}$$