Доказательство. Теорема доказывается аналогично теореме 2.

Теорема 6. Если $T \in \mathfrak{S}(R^n)'$ и $\varphi \in \mathfrak{S}(R^n)$, то

$$\widehat{(T * \varphi)} = (2\pi)^{n/2}\, \hat{\varphi} \hat{T}. \tag{14}$$

Если $T_1 \in \mathfrak{S}(R^n)'$ и $T_2 \in \mathfrak{E}(R^n)'$, то

$$\widehat{(T_1 * T_2)} = (2\pi)^{n/2}\, \hat{T}_2 \cdot \hat{T}_1; \tag{15}$$

последнее имеет смысл, так как по теореме 4 обобщенная функция $\hat{T}_2$ регулярна и определяется некоторой функцией.

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathfrak{S}(R^n)$. Тогда преобразование Фурье функции $\hat{\varphi} \cdot \psi$ равно (формула (13), гл. VI, § 1) выражению $(2\pi)^{-n/2}\, \hat{\hat{\varphi}} * \hat{\psi} = (2\pi)^{-n/2}\, \check{\varphi} * \hat{\psi}$. Поэтому

$$\widehat{(T * \varphi)}(\psi) = (T * \varphi)(\hat{\psi}) = ((T * \varphi) * \overset{\times}{\hat{\varphi}})(0) = (T * (\varphi * \overset{\times}{\hat{\psi}}))(0) =$$
$$= T((\varphi * \overset{\times}{\hat{\psi}})\check{\ }) = T(\check{\varphi} * \hat{\psi}) = T\left((2\pi)^{n/2} (\hat{\varphi} \cdot \psi)\hat{\ }\right) =$$
$$= (2\pi)^{n/2}\, \hat{T}(\hat{\varphi}\psi) = (2\pi)^{n/2}\, \hat{\varphi}\hat{T}(\psi),$$

откуда и следует (14).

Пусть ψ_ε—усреднение $T_2 * \varphi_\varepsilon$. Тогда преобразование Фурье свертки $T_1 * \psi_\varepsilon = T_1 * (T_2 * \varphi_\varepsilon) = (T_1 * T_2) * \varphi_\varepsilon$ равно, согласно формуле (14), выражению

$$(2\pi)^{n/2}\, \hat{T}_1 \cdot \hat{\psi}_\varepsilon = (2\pi)^{n/2}\, \hat{T}_1 \cdot (2\pi)^{n/2}\, \hat{T}_2 \cdot \hat{\varphi}_\varepsilon = (2\pi)^{n/2}\, \widehat{(T_1 * T_2)} \cdot \hat{\varphi}_\varepsilon.$$

Полагая $\varepsilon \downarrow 0$ и учитывая, что $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \hat{\varphi}_\varepsilon(x) = 1$, мы получаем (15).

4. Теоремы Пэли — Винера. Преобразование Лапласа

Для преобразования Фурье функций класса $C_0^\infty(R^n)$ справедлива

Теорема Пэли — Винера для функций. Целая голоморфная функция $F(\zeta) = F(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ от n комплексных переменных $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ является *преобразованием Фурье — Лапласа*

$$F(\zeta) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R^n} e^{-i\langle\zeta, x\rangle} f(x)\, dx \tag{1}$$

функции $f \in C_0^\infty(R^n)$, носитель которой $\operatorname{supp}(f)$ содержится в шаре $|x| \leqslant B$ пространства R^n, тогда и только тогда, когда для любого целого N существует положительная постоянная C_N, такая, что

$$|F(\zeta)| \leqslant C_N (1 + |\zeta|)^{-N} e^{B|\operatorname{Im} \zeta|}. \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость следует из формулы

$$\prod_{j=1}^{n}(i\zeta_j)^{\beta_j}F(\zeta)=(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{|x|\leqslant B} e^{-i\langle\zeta,\,x\rangle}D^{\beta}f(x)\,dx,$$

которая получается интегрированием по частям.

Докажем достаточность. Положим

$$f(x)=(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n} e^{i\langle x,\,\xi\rangle}F(\xi)\,d\xi. \tag{3}$$

При условии (2) выражение (3) имеет смысл. Как и в случае функций из $\mathfrak{S}(R^n)$, можно показать, что преобразование Фурье $\hat{f}(\xi)$ функции $f(x)$ равно $F(\xi)$ и $f(x)\in C_0^\infty(R^n)$; последнее вытекает из формулы дифференцирования

$$D^{\beta}f(x)=(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n} e^{i\langle x,\,\xi\rangle}\prod_{j=1}^{n}(i\xi_j)^{\beta_j}F(\xi)\,d\xi \tag{4}$$

при выполнении условия (2). Условие (2) и теорема Коши позволяют перейти в формуле (3) к интегрированию в комплексной области и получить

$$f(x)=(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n} e^{i\langle x,\,\xi+i\eta\rangle}F(\xi+i\eta)\,d\xi \tag{3$'$}$$

при любом вещественном η вида $\eta=\alpha x/|x|$, где $\alpha>0$. Полагая $N=n+1$, мы получаем отсюда неравенство

$$|f(x)|\leqslant C_N e^{B|\eta|-\langle x,\,\eta\rangle}(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n}(1+|\xi|)^{-N}\,d\xi.$$

Если $|x|>B$, то, полагая $\alpha\uparrow+\infty$, мы находим, что $f(x)=0$. Следовательно, $\operatorname{supp}(f)\subseteq\{x\in R^n;\ |x|\leqslant B\}$. Теорема доказана.

Эту теорему можно распространить на обобщенные функции с бикомпактными носителями.

Теорема Пэли — Винера для обобщенных функций из $\mathfrak{E}(R^n)'$ (Л. Шварц). Для того чтобы целая голоморфная функция $F(\zeta)=F(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n)$ от n комплексных переменных $\zeta_j=\xi_j+i\eta_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$ определяла преобразование Фурье — Лапласа[1])

[1]) Имеется в виду функция $F(\zeta)=F(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ комплексных переменных ζ_i, которая при вещественных значениях $\zeta_i=x_i$ обращается в функцию $F(x_1,\ldots,x_n)$, определяющую преобразование Фурье $\hat{T}$ обобщенной функции $T\in\mathfrak{E}(R^n)':\hat{T}=T_F$. — *Прим. перев.*

некоторой обобщенной функции $T \in \mathfrak{E}(R^n)'$, необходимо и достаточно, чтобы существовали положительные постоянные B, N и C, такие, что

$$|F(\zeta)| \leqslant C(1+|\zeta|)^N e^{B|\operatorname{Im}\zeta|}. \tag{5}$$

Доказательство. Необходимость следует из того (теорема 2, гл. I, § 13), что если $T \in \mathfrak{E}(R^n)'$, то существуют такие положительные постоянные C, B и N, что

$$|T(\varphi)| \leqslant C \sum_{|\beta| \leqslant N} \sup_{|x| \leqslant B} \left|D^\beta \varphi(x)\right| \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathfrak{E}(R^n).$$

Остается только положить $\varphi(x) = e^{-i\langle x, \xi\rangle}$ и применить формулу (13) предыдущего параграфа.

Перейдем к доказательству достаточности. При выполнении неравенства (5) $F(\xi)$ принадлежит $\mathfrak{S}(R^n)'$, и поэтому определяет преобразование Фурье некоторой обобщенной функции $T \in \mathfrak{S}(R^n)'$. По формуле (14) предыдущего параграфа преобразование Фурье обобщенной функции $T_\varepsilon = T * \varphi_\varepsilon$ равно $(2\pi)^{n/2}\hat{T}\cdot\hat{\varphi}_\varepsilon$. Поскольку носитель $\operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon)$ лежит в шаре $|x| \leqslant \varepsilon$ пространства R^n, по предыдущей теореме

$$|\hat{\varphi}_\varepsilon(\xi)| \leqslant C' \cdot e^{\varepsilon|\operatorname{Im}\zeta|}.$$

Кроме того, обобщенная функция $\hat{T}$ определяется функцией $F(\xi)$, поэтому обобщенная функция $(2\pi)^{n/2}\hat{T}\cdot\hat{\varphi}_\varepsilon$ определяется функцией $(2\pi)^{n/2} F(\xi)\cdot\hat{\varphi}_\varepsilon(\xi)$. Последняя функция может быть аналитически продолжена на все комплексное n-мерное пространство, и это продолжение удовлетворяет оценке типа (5) с постоянной $B+\varepsilon$ вместо B. Таким образом, по предыдущей теореме $\operatorname{supp}(T_\varepsilon) = \operatorname{supp}(T * \varphi_\varepsilon)$ принадлежит шару $|x| \leqslant B+\varepsilon$ пространства R^n. Отсюда, полагая $\varepsilon \downarrow 0$ и используя лемму из предыдущего параграфа, мы видим, что носитель $\operatorname{supp}(T)$ принадлежит шару $|x| \leqslant B$ пространства R^n.

Замечание. Приведенная выше формулировка и доказательство теоремы Пэли — Винера взяты из книги Хёрмандера [2].

Преобразование Фурье и преобразование Лапласа. Пусть $g(t) \in L^2(0, \infty)$. Тогда, как показывает неравенство Шварца, при $x > 0$

$$g(t)e^{-tx} \in L^1(0, \infty) \cap L^2(0, \infty).$$

Применяя теорему Планшереля, мы получаем для преобразования Фурье

$$f(x+iy) = (2\pi)^{-1/2}\int_0^\infty g(t)e^{-tx}e^{-ity}\,dt =$$

$$= (2\pi)^{-1/2}\int_0^\infty g(t)e^{-t(x+iy)}\,dt \qquad (x > 0) \tag{6}$$

неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2\,dy = \int_0^{\infty} |g(t)|^2 e^{-2tx}\,dx \leqslant \int_0^{\infty} |g(t)|^2\,dt. \tag{7}$$

Функция $f(x+iy)$ голоморфна по переменной $z=x+iy$ в правой полуплоскости $\operatorname{Re}(z)=x>0$. Это можно установить, дифференцируя (6) под знаком интеграла; такое дифференцирование законно, поскольку $g(t)te^{-tz}$ как функция переменной t принадлежит $L^1(0, \infty)$ и $L^2(0, \infty)$ при $\operatorname{Re}(z)=x>0$ [1]). Тем самым мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $g(t) \in L^2(0, \infty)$. Тогда (*одностороннее*) *преобразование Лапласа*

$$f(z) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^{\infty} g(t) e^{-tz}\,dt \qquad (\operatorname{Re}(z) > 0) \tag{6'}$$

принадлежит так называемому *классу Харди — Лебега* $H^2(0)$, т. е. (1°) функция $f(z)$ голоморфна в правой полуплоскости $\operatorname{Re}(z)>0$; (2°) для каждого фиксированного $x>0$ функция $f(x+iy)$ как функция от y принадлежит $L^2(-\infty, \infty)$, и при этом

$$\sup_{x>0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2\,dy \right) < \infty. \tag{7'}$$

Эта теорема допускает следующее обращение.

Теорема 2 (Пэли—Винер). Пусть $f(z) \in H^2(0)$. Тогда для $f(x+iy)$ существует *граничная функция* $f(iy) \in L^2(-\infty, \infty)$ в том смысле, что

$$\lim_{x \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(iy) - f(x+iy)|^2\,dy = 0, \tag{8}$$

[1]) Если доопределить $g(t)$ на $(-\infty, \infty)$, полагая $g(t)=0$ для $t<0$, то к функции $g(t)e^{-tx}$ можно при $x>0$ применить теорему Планшереля и следствие 1 из этой теоремы. В этом случае существует функция $f(x+iy) = \widehat{(ge^{-tx})} = \underset{h\uparrow\infty}{\text{l. i. m.}}\ (2\pi)^{-1/2} \int_0^h e^{-tx} g(t) e^{-ity}\,dt$. Поскольку $g(t)e^{-tx} \in L^1(0, \infty)$, интеграл сходится к f в обычном смысле: $f = (2\pi)^{-1/2} \int_0^{\infty} e^{-tx} g(t) e^{-ity}\,dt$. Применяя к f формулу (20) (§ 2, гл. VI), мы и получаем неравенство (7). — *Прим. перев.*

и при этом обратное преобразование Фурье

$$g(t) = (2\pi)^{-1/2} \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \int_{-N}^{N} f(iy)\, e^{ity}\, dy \tag{9}$$

обращается в нуль при $t < 0$, а сама функция $f(z)$ получается как преобразование Лапласа функции $g(t)$.

Доказательство. Пространство $L^2(-\infty, \infty)$ локально слабо бикомпактно, поэтому существуют последовательность $\{x_n\}$ и функция $f(iy) \in L^2(-\infty, \infty)$, такие, что

$$x_n \downarrow 0 \quad \text{и} \quad w\text{-}\lim_{n\to\infty} f(x_n + iy) = f(iy).$$

Так как

$$\int_{-N}^{N} \left\{ \int_{+0}^{\delta} |f(x+iy)|^2\, dx \right\} dy \leqslant \int_{+0}^{\delta} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2\, dy \right\} dx < \infty$$

при любых $\delta > 0$ и $N > 0$, то для всякого $\delta > 0$ можно найти такую последовательность $\{N_k\}$, что

$$\lim_{k\to\infty} N_k = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{k\to\infty} \int_{+0}^{\delta} |f(x \pm iN_k)|^2\, dx = 0.$$

Применяя неравенство Шварца, мы обнаруживаем, что

$$\lim_{k\to\infty} \int_{+0}^{\delta} |f(x \pm iN_k)|\, dx = 0. \tag{10}$$

Отсюда вытекает формула

$$f(z) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(it)}{z - it}\, dt \quad (\mathrm{Re}(z) > 0); \tag{11}$$

ее можно вывести следующим образом. По теореме Коши об интегральном представлении

$$f(z) = (2\pi i)^{-1} \int_{C} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad (\mathrm{Re}(z) > 0), \tag{12}$$

где контур интегрирования C, охватывающий точку z, можно составить из направленных отрезков

$$\overrightarrow{x_0 - iN_k,\ x_1 - iN_k}, \qquad \overrightarrow{x_1 - iN_k,\ x_1 + iN_k},$$

$$\overrightarrow{x_1 + iN_k,\ x_0 + iN_k}, \qquad \overrightarrow{x_0 + iN_k,\ x_0 - iN_k},$$

$$x_0 < \mathrm{Re}(z) < x_1, \qquad -N_k < \mathrm{Im}(z) < N_k.$$

Полагая $k \to \infty$ и принимая во внимание (10), получаем

$$f(z) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x_0 + it)}{z - (x_0 + it)}\, dt + (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x_1 + it)}{(x_1 + it) - z}\, dt.$$

При $x_1 \to \infty$ второе слагаемое в правой части стремится к нулю; это видно из (7′) и неравенства Шварца. Полагая в первом слагаемом $x_0 = x_n$, мы при $n \to \infty$ получаем формулу (11). Аналогично выводится равенство

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(it)}{it - z}\, dt = 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}(z) < 0. \tag{13}$$

Определим теперь вспомогательную функцию $h(x)$:

$h(x) = 0$ при $x \leqslant 0$ и $h(x) = e^{-zx}$ при $x > 0$ $(\operatorname{Re}(z) > 0)$.

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{ixt}\, dx = \int_{0}^{\infty} e^{ixt - zx}\, dx = (z - it)^{-1},$$

откуда по теореме Планшереля

$$\underset{N \to \infty}{\text{l. i. m.}} (2\pi)^{-1} \int_{-N}^{N} \frac{e^{-itx}}{z - it}\, dt = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ e^{-zx} & \text{при} \quad x > 0, \end{cases} \quad \operatorname{Re}(z) > 0. \tag{14}$$

Точно так же получаем

$$\underset{N \to \infty}{\text{l. i. m.}} (2\pi)^{-1} \int_{-N}^{N} \frac{e^{-itx}}{z - it}\, dt = \begin{cases} -e^{-zx} & \text{при} \quad x < 0, \\ 0 & \text{при} \quad x > 0, \end{cases} \quad \operatorname{Re}(z) < 0. \tag{14′}$$

Теперь, применяя к выражению (11) равенство Парсеваля (27) из гл. VI, § 2, мы видим, что функция $f(z)$ действительно представляет собой одностороннее преобразование Лапласа функции $g(t)$, определяемой формулой (9). Применяя равенство Парсеваля к выражению (13), мы находим также, что $g(t) = 0$ при $t < 0$.

Докажем, наконец, что имеет место формула (8).

Складывая (11) и (13), мы получаем для функции $f(z)$ представление в виде *интеграла Пуассона*

$$f(z) = f(x + iy) = \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(it)}{(t - y)^2 + x^2}\, dt \quad \text{для всех} \quad x > 0. \tag{15}$$

Учитывая, что

$$\frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t - y)^2 + x^2} = 1, \tag{16}$$

мы находим, что

$$|f(x+iy)-f(iy)| \leqslant \frac{x}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|f^+(s+y)-f^+(y)|}{s^2+x^2}\, ds, \text{ где } f^+(y)=f(iy).$$

Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)-f(iy)|^2\, dy \leqslant \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|f^+(s+y)-f^+(y)|}{s^2+x^2}\, ds \right\}^2 dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x^2}{\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{s^2+x^2} \right) \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|f^+(s+y)-f^+(y)|^2}{s^2+x^2}\, ds \right) dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{s^2+x^2} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f^+(s+y)-f^+(y)|^2\, dy \right\} = \frac{x}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(f^+;\, s)}{s^2+x^2}\, ds,$$

где функция $\mu(f^+;\, s)$ непрерывна по s, обращается в нуль при $s=0$ и $0 \leqslant \mu(f^+;\, s) \leqslant 4\, \| f^+ \|^2$.

Чтобы показать, что правая часть стремится к нулю при $x \downarrow 0$, зададим призвольное $\varepsilon > 0$ и выберем такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, чтобы при $|s| \leqslant \delta$ выполнялось неравенство $\mu(f^+;\, s) \leqslant \varepsilon$. Разобьем интеграл на три слагаемых:

$$\frac{x}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(f^+;\, s)}{s^2+x^2}\, ds = \frac{x}{\pi} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{-\delta} + \int\limits_{-\delta}^{\delta} + \int\limits_{\delta}^{\infty} \right\} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Из (16) видно, что $|I_2| \leqslant \varepsilon$; кроме того,

$$|I_j| \leqslant 4\pi^{-1}\, \| f^+ \|^2 \operatorname{arc\,ctg}(\delta/x) \qquad (j=1,\ 3).$$

Отсюда ясно, что интеграл слева стремится к нулю при $x \downarrow 0$. Это и доказывает теорему.

Замечание 1. Первоначальная формулировка и доказательство этой теоремы имеются в работе Пэли — Винера [1]. По поводу одностороннего преобразования Лапласа медленно растущих обобщенных функций см. Л. Шварц [2].

Замечание 2. Сато [1] принадлежит удачная идея определить „обобщенную функцию“ как „граничное значение аналитической функции“. Эту идею можно пояснить следующим образом. Обозначим через $\mathfrak{B}$ совокупность всех функций $\varphi(z)$, определенных и регулярных в верхней и нижней полуплоскостях комплексной z-плоскости, и пусть $\mathfrak{R}$ — совокупность всех функций, регулярных на всей комплексной плоскости. Множество $\mathfrak{B}$ представляет собой кольцо по сложению и умножению функций, а $\mathfrak{R}$ — подкольцо кольца $\mathfrak{B}$. Сато называет класс вычетов $(\operatorname{mod} \mathfrak{R})$, содержащий функцию $\varphi(z)$, „обобщенной функцией“ $\widehat{\varphi}(x)$ на вещественной оси R^1, определяемой функцией $\varphi(x)$. „Обобщенная производная“ $d\widehat{\varphi}(x)/dx$ обобщенной функции $\widehat{\varphi}(x)$ естественным образом определяется как класс вычетов (mod $\mathfrak{R}$), содержащий производную $d\varphi(z)/dz$. Так, например, „дельта-функция $\delta(x)$“ при таком определении — это класс вычетов (mod $\mathfrak{R}$), содержащий функцию $-(2\pi i)^{-1} z^{-1}$. Теория Сато „обобщенных функций многих переменных“ допускает следующую весьма интересную топологическую интерпретацию. Пусть M — вещественное n-мерное аналитическое многообразие и X — комплексификация M. Тогда n-мерная группа относительных когомологий $H^n(X \bmod (X - M))$ с коэффициентами в пучке ростков регулярных функций, заданных в X, приводит к понятию „обобщенной функции на M“. Таким образом, класс относительных когомологий является естественным определением „обобщенной функции“.

Замечание 3. Более подробное изложение преобразования Фурье обобщенных функций можно найти в книгах Л. Шварца [1] и Гельфанда — Шилова [1]. В последней книге, кроме пространств типа $\mathfrak{D}(R^n)$, $\mathfrak{S}(R^n)$ и $\mathfrak{O}_M(R^n)$, вводится еще целый ряд классов основных функций, для которых определяются обобщенные функции и изучаются преобразования Фурье соответствующих обобщенных функций. См. также Фридман [1] и Хёрмандер [6].

5. Теорема Титчмарша

Теорема (Титчмарш). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные вещественные или комплексные функции, определенные в области $0 \leqslant x < \infty$, такие, что выражение

$$(f * g)(x) \equiv \int_0^x f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_0^x g(x-y)\, f(y)\, dy \equiv (g * f)(x) \quad (1)$$

обращается тождественно в нуль. Тогда по крайней мере одна из функций $f(x)$ или $g(x)$ должна тождественно равняться нулю.

Существуют различные доказательства этой важной теоремы, например, принадлежащие Титчмаршу [1], а также Краму и Дюфреснуа. Доказательство, которое мы даем здесь, принадлежит Рылль-Нардзевскому [1]; оно приводится также в книге Микусинского [1]. Это доказательство элементарно в том смысле, что в нем не используется теория функций комплексного переменного.

Лемма 1 (Фрагмен). Если функция $g(u)$ непрерывна в отрезке $0 \leqslant u \leqslant T$, то для t из области $0 \leqslant t \leqslant T$ имеет место формула

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^T e^{kx(t-u)} g(u)\, du = \int_0^t g(u)\, du. \quad (2)$$