функцией" $\widehat{\varphi}(x)$ на вещественной оси R^1, определяемой функцией $\varphi(x)$. „Обобщенная производная" $d\widehat{\varphi}(x)/dx$ обобщенной функции $\widehat{\varphi}(x)$ естественным образом определяется как класс вычетов (mod $\mathfrak{R}$), содержащий производную $d\varphi(z)/dz$. Так, например, „дельта-функция $\delta(x)$" при таком определении — это класс вычетов (mod $\mathfrak{R}$), содержащий функцию $-(2\pi i)^{-1} z^{-1}$. Теория Сато „обобщенных функций многих переменных" допускает следующую весьма интересную топологическую интерпретацию. Пусть M — вещественное n-мерное аналитическое многообразие и X — комплексификация M. Тогда n-мерная группа относительных когомологий $H^n(X \bmod (X - M))$ с коэффициентами в пучке ростков регулярных функций, заданных в X, приводит к понятию „обобщенной функции на M". Таким образом, класс относительных когомологий является естественным определением „обобщенной функции".

Замечание 3. Более подробное изложение преобразования Фурье обобщенных функций можно найти в книгах Л. Шварца [1] и Гельфанда — Шилова [1]. В последней книге, кроме пространств типа $\mathfrak{D}(R^n)$, $\mathfrak{S}(R^n)$ и $\mathfrak{O}_M(R^n)$, вводится еще целый ряд классов основных функций, для которых определяются обобщенные функции и изучаются преобразования Фурье соответствующих обобщенных функций. См. также Фридман [1] и Хёрмандер [6].

5. Теорема Титчмарша

Теорема (Титчмарш). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные вещественные или комплексные функции, определенные в области $0 \leqslant x < \infty$, такие, что выражение

$$(f * g)(x) \equiv \int_0^x f(x-y)\,g(y)\,dy = \int_0^x g(x-y)\,f(y)\,dy \equiv (g * f)(x) \quad (1)$$

обращается тождественно в нуль. Тогда по крайней мере одна из функций $f(x)$ или $g(x)$ должна тождественно равняться нулю.

Существуют различные доказательства этой важной теоремы, например, принадлежащие Титчмаршу [1], а также Краму и Дюфреснуа. Доказательство, которое мы даем здесь, принадлежит Рылль-Нардзевскому [1]; оно приводится также в книге Микусинского [1]. Это доказательство элементарно в том смысле, что в нем не используется теория функций комплексного переменного.

Лемма 1 (Фрагмен). Если функция $g(u)$ непрерывна в отрезке $0 \leqslant u \leqslant T$, то для t из области $0 \leqslant t \leqslant T$ имеет место формула

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^T e^{kx(t-u)} g(u)\,du = \int_0^t g(u)\,du. \quad (2)$$

Доказательство. Напишем очевидное разложение

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(k!)^{-1}e^{kx(t-u)}=1-\exp\left(e^{-x(t-u)}\right).$$

При любых фиксированных x и t ряд слева сходится равномерно относительно u в отрезке $0\leqslant u\leqslant T$, поэтому его можно почленно интегрировать. Выполняя интегрирование и применяя лемму Лебега — Фату, мы получаем формулу (2).

Лемма 2. Если функция $f(t)$ непрерывна при $0\leqslant t\leqslant T$ и $\left|\int\limits_0^T e^{nt}f(t)\,dt\right|\leqslant M$ для значений $n=1, 2, \ldots$, где положительная постоянная M не зависит от n, то функция $f(t)$ тождественно равна нулю в отрезке $0\leqslant t\leqslant T$.

Доказательство. Воспользуемся неравенством

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^T\frac{(-1)^{k-1}}{k!}e^{kn(t-u)}f(T-u)\,du\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}e^{kn(t-T)}\left|\int\limits_0^T e^{kn(T-u)}f(T-u)\,du\right|\leqslant M\left(\exp\left(e^{-n(T-t)}\right)-1\right).$$

Если $t<T$, то выражение справа стремится к нулю при $n\to\infty$. Поэтому, полагая $g(u)=f(T-u)$ и применяя лемму 1, мы видим, что $\int\limits_0^t f(T-u)\,du=0$ при всех $0\leqslant t\leqslant T$. Так как функция f непрерывна, отсюда следует, что $f(t)\equiv 0$ для всех t из отрезка $0\leqslant t\leqslant T$.

Следствие 1. Если функция $g(x)$ непрерывна при $1\leqslant x\leqslant X$ и существует такое положительное число N, что

$$\left|\int\limits_1^X x^n g(x)\,dx\right|\leqslant N\qquad(n=1,\ 2,\ \ldots),$$

то $g(x)\equiv 0$ при $1\leqslant x\leqslant X$.

Доказательство. Полагая $x=e^t$, $X=e^T$ и $xg(x)=f(t)$, мы получаем по лемме 2, что $f(t)=0$ при $0\leqslant t\leqslant T$. Поэтому и $xg(x)=0$ при $1\leqslant x\leqslant X$. Отсюда следует, что $g(x)=0$ при $1\leqslant x\leqslant X$.

Следствие 2 (теорема Лерха). Пусть функция $f(t)$ непрерывна в области $0\leqslant t\leqslant T$ и $\int\limits_0^T t^n f(t)\,dt=0$ $(n=1, 2, \ldots)$; тогда $f(t)=0$ при всех значениях $t\in[0,\ T]$.

Доказательство. Пусть t_0 — произвольная точка интервала $(0, T)$; положим $t = t_0 x$, $T = t_0 X$, $f(t) = g(x)$. Тогда

$$t_0^{n+1} \int_0^X x^n g(x)\,dx = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

и поэтому $\left| \int_1^X x^n g(x)\,dx \right| = \left| \int_0^1 x^n g(x)\,dx \right| \leqslant \int_0^1 |g(x)|\,dx = N$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Применяя следствие 1, мы видим, что $g(x) = 0$ для $1 \leqslant x \leqslant X$, откуда $f(t) = 0$ при $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Так как t_0 — произвольная точка интервала $(0, T)$, то $f(t) = 0$ на всем отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$.

Доказательство теоремы Титчмарша. Докажем сначала эту теорему в частном случае, когда $f = g$: если функция $f(t)$ непрерывна и $(f * f)(t) \equiv \int_0^t f(t-u) f(u)\,du = 0$ при всех значениях $0 \leqslant t \leqslant 2T$, то $f(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$.

Производя в равенстве

$$\int_0^{2T} e^{n(2T-t)} \left(\int_0^t f(u) f(t-u)\,du \right) dt = 0$$

замену переменных $u = T - v$, $t = 2T - v - w$, мы получаем

$$\iint_\Delta e^{n(v+w)} f(T-v) f(T-w)\,dv\,dw = 0,$$

где Δ — треугольник $v + w \geqslant 0$, $v \leqslant T$, $w \leqslant T$ на плоскости v, w. Обозначим через Δ' треугольник вида $v + w \leqslant 0$, $v \geqslant -T$, $w \geqslant -T$. Тогда объединение $\Delta + \Delta'$ представляет собой квадрат $-T \leqslant v, w \leqslant T$. Полученное выше равенство показывает, что интеграл от функции $e^{n(v+w)} f(T-v) f(T-w)$ по квадрату $\Delta + \Delta'$ равен интегралу от этой же функции по области Δ'. Интеграл по $\Delta + \Delta'$ представляет собой произведение двух однократных интегралов, а в интеграле по Δ' выполняется неравенство $e^{n(v+w)} \leqslant 1$. Поэтому

$$\left| \int_{-T}^{T} e^{nu} f(T-u)\,du \right|^2 = \left| \iint_{\Delta+\Delta'} e^{n(v+w)} f(T-v) f(T-w)\,dv\,dw \right| \leqslant$$

$$\leqslant \iint_{\Delta'} |f(T-v) f(T-w)|\,dv\,dw \leqslant 2T^2 \cdot A^2,$$

где A — максимум $|f(t)|$ при $0 \leqslant t \leqslant 2T$, а $2T^2$ — площадь треугольника Δ'. Отсюда

$$\left| \int_{-T}^{T} e^{nu} f(T-u)\,du \right| \leqslant \sqrt{2}\, T \cdot A$$

и, кроме того, $\left| \int_{-T}^{0} e^{nu} f(T-u)\,du \right| \leqslant TA$. Таким образом,

$$\left| \int_{0}^{T} e^{nu} f(T-u)\,du \right| = \left| \int_{-T}^{T} - \int_{-T}^{0} \right| \leqslant \left(1+\sqrt{2}\right) TA \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

и в силу следствия 2 $f(t)=0$ для всех $t \in [0,\ T]$.

Теперь мы можем доказать теорему Титчмарша для общего случая. Допустим, что $\int_0^t f(t-u)\,g(u)\;du = 0$ при $0 \leqslant t < \infty$. Тогда для всех значений $0 \leqslant t < \infty$

$$\int_0^t (t-u) f(t-u)\, g(u)\,du + \int_0^t f(t-u)\, u g(u)\,du =$$

$$= t \int_0^t f(t-u)\, g(u)\,du = 0.$$

Это можно записать в виде

$$(f_1 * g)(t) + (f * g_1)(t) = 0 \qquad (0 \leqslant t < \infty),$$

где

$$f_1(t) = t f(t), \quad g_1(t) = t g(t).$$

Следовательно,

$$[f * \{g_1 * (f_1 * g + f * g_1)\}](t) = 0,$$

и поэтому

$$[(f * g) * (f_1 * g_1)](t) + [(f * g_1) * (f * g_1)](t) = 0.$$

Последнее означает, что $[(f * g_1) * (f * g_1)](t) = 0$, так как $(f * g)(t) = 0$. Это приводит к рассмотренному выше частному случаю; мы видим, что $(f * g_1)(t) = 0$, т. е.

$$\int_0^t f(t-u)\, u g(u)\,du = 0 \qquad (0 \leqslant t < \infty).$$

Из этого равенства, применяя аналогичные рассуждения, мы получаем

$$\int_0^t f(t-u)\, u^2 g(u)\,du = 0 \qquad (0 \leqslant t < \infty).$$

Повторяя эти рассуждения, мы находим, что

$$\int_0^t f(t-u)\, u^n g(u)\, du = 0 \qquad (0 \leqslant t < \infty,\ n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Отсюда, согласно следствию 2,

$$f(t-u)\, g(u) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant u \leqslant t < \infty.$$

Если предположить, что имеется точка u_0, в которой $g(u_0) \neq 0$, то $f(t-u_0) = 0$ при всех $t \geqslant u_0$, т. е. $f(v) = 0$ для всех $v \geqslant 0$. Поэтому либо $f(v) = 0$ при всех $v \geqslant 0$, либо $g(v) = 0$ при всех $v \geqslant 0$.

6. Операторное исчисление Микусинского

В своей книге „Electromagnetic Theory" (London, 1899) физик Хевисайд ввел операционное исчисление и успешно применял его к обыкновенным дифференциальным уравнениям, связанным с задачами электротехники. В этом исчислении встречались операторы, точный смысл которых был не вполне ясен. Интерпретация таких операторов, предложенная самим Хевисайдом, приводит к ряду трудностей. Интерпретация, предложенная его последователями, основывается на теории преобразований Лапласа, поэтому при таком подходе остается неясным, насколько в действительности широка область применимости операционного метода. Предложенная Микусинским теория, основанная на операции, обратной свертке, позволяет придать операционному исчислению простую и ясную форму, допускающую приложение к обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами, а также к некоторым уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами, разностным и интегральным уравнениям.

Операция, обратная свертке. Обозначим через C совокупность всех непрерывных комплексных функций $f(t)$, определенных при $0 \leqslant t < \infty$. В этом параграфе мы будем обозначать функции символом $\{f(t)\}$ или f, а через $f(t)$ — значение функции f в точке t. Свертку вида $\left\{\int_0^t f(t-s)\, g(s)\, ds\right\}$ функций f и g мы будем обозначать через $\{f(t)\} \cdot \{g(t)\}$ или $f \cdot g$:

$$\{f(t)\} \cdot \{g(t)\} = \{(f * g)(t)\} = \left\{\int_0^t f(t-s)\, g(s)\, ds\right\}. \tag{1}$$

Как было показано в гл. VI, § 3,

$$f \cdot g = g \cdot f \quad \text{(коммутативность)}, \tag{2}$$

$$f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h \quad \text{(ассоциативность)}. \tag{3}$$