Повторяя эти рассуждения, мы находим, что

$$\int_0^t f(t-u)\,u^n g(u)\,du = 0 \qquad (0 \leqslant t < \infty,\ n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Отсюда, согласно следствию 2,

$$f(t-u)\,g(u) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant u \leqslant t < \infty.$$

Если предположить, что имеется точка u_0, в которой $g(u_0) \neq 0$, то $f(t-u_0) = 0$ при всех $t \geqslant u_0$, т. е. $f(v) = 0$ для всех $v \geqslant 0$. Поэтому либо $f(v) = 0$ при всех $v \geqslant 0$, либо $g(v) = 0$ при всех $v \geqslant 0$.

6. Операторное исчисление Микусинского

В своей книге „Electromagnetic Theory" (London, 1899) физик Хевисайд ввел операционное исчисление и успешно применял его к обыкновенным дифференциальным уравнениям, связанным с задачами электротехники. В этом исчислении встречались операторы, точный смысл которых был не вполне ясен. Интерпретация таких операторов, предложенная самим Хевисайдом, приводит к ряду трудностей. Интерпретация, предложенная его последователями, основывается на теории преобразований Лапласа, поэтому при таком подходе остается неясным, насколько в действительности широка область применимости операционного метода. Предложенная Микусинским теория, основанная на операции, обратной свертке, позволяет придать операционному исчислению простую и ясную форму, допускающую приложение к обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами, а также к некоторым уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами, разностным и интегральным уравнениям.

Операция, обратная свертке. Обозначим через C совокупность всех непрерывных комплексных функций $f(t)$, определенных при $0 \leqslant t < \infty$. В этом параграфе мы будем обозначать функции символом $\{f(t)\}$ или f, а через $f(t)$ — значение функции f в точке t. Свертку вида $\left\{\int_0^t f(t-s)\,g(s)\,ds\right\}$ функций f и g мы будем обозначать через $\{f(t)\} \cdot \{g(t)\}$ или $f \cdot g$:

$$\{f(t)\} \cdot \{g(t)\} = \{(f * g)(t)\} = \left\{\int_0^t f(t-s)\,g(s)\,ds\right\}. \tag{1}$$

Как было показано в гл. VI, § 3,

$$f \cdot g = g \cdot f \quad \text{(коммутативность)}, \tag{2}$$

$$f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h \quad \text{(ассоциативность)}. \tag{3}$$

Кроме операции „умножения“ $f \cdot g$, определенной как свертка f и g, мы можем ввести также операцию сложения

$$\{f(t)\} + \{g(t)\} = \{f(t) + g(t)\}. \tag{4}$$

При этом выполняется распределительный закон

$$h \cdot (f + g) = h \cdot f + h \cdot g. \tag{5}$$

Множество C образует *кольцо* по сложению $f + g$ и умножению $f \cdot g$. *Нулем* в этом кольце служит функция, тождественно равная нулю; мы будем обозначать ее через 0; C — это *кольцо без делителей нуля*, т. е. если $f \cdot g = 0$ в C, то по крайней мере одна из функций f или g равна 0. Последнее вытекает из доказанной выше теоремы Титчмарша. Введем операцию, обратную „умножению“ $f \cdot g = f * g$, как *операцию, обратную свертке*, т. е. определим „отношение“ $f/g = \dfrac{f}{g}$ двух функций f, $g \in C$, где $g \neq 0$, следующим образом:

$$\begin{aligned} &\text{равенство } a/b = c/d \text{ эквивалентно } a \cdot d = b \cdot c, \\ &\text{в частности, } a/b = c \text{ эквивалентно } a = b \cdot c, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \tag{7}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}, \tag{8}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad (c \neq 0). \tag{9}$$

Мы получаем коммутативное поле Q.

Оператор. Отношение a/b мы будем называть „оператором“. Всякий элемент $a \in C$ представляет собой пример оператора, так как его можно отождествить, согласно (9), с $a \cdot b/b\,(b \neq 0)$ [1]).

Единица или δ-оператор. Оператор $c/c\,(c \neq 0)$ представляет собой *единицу* операции умножения в поле Q. Действительно, согласно (7) и (9), имеем

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{b}. \tag{10}$$

Кроме того, по правилу (6) $c/c = b/b$. Мы будем называть c/c *единицей*, или *δ-оператором*, и обозначать через 1:

$$1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}. \tag{11}$$

---

[1]) Если в C существует функция φ, такая, что $f = g \cdot \varphi$, то „отношение“ f/g обозначает функцию φ. Если для f и g такой функции φ нет, то „отношение“ f/g формально присоединяется к C как „обобщенный“ элемент поля Q или „оператор“ (по терминологии Микусинского). См. Микусинский [1], [2*]. — *Прим. перев.*

Заметим, что оператор $1 = c/c$ не принадлежит множеству C; в самом деле, примем за c функцию $\{1\}$. Если допустить, что $\{1\}/\{1\} = \{f(t)\} \in C$, то должно получиться равенство

$$\{1\} \cdot \{f(t)\} = \left\{ \int_0^t 1 \cdot f(s)\,ds \right\} = \left\{ \int_0^t f(s)\,ds \right\} = \{1\},$$

которое, очевидно, неверно.

Оператор интегрирования. Обозначим через h оператор, определяемый функцией $\{1\}$:

$$h = \{1\}, \tag{12}$$

и назовем h *оператором интегрирования*. В самом деле, это название оправдывается тем, что для любой функции $f \in C$, как мы уже видели выше,

$$h \cdot \{f(t)\} = \{1\} \cdot \{f(t)\} = \left\{ \int_0^t f(s)\,ds \right\}. \tag{13}$$

Замечание. В книге Микусинского, на которую мы уже ссылались, для функции $\{1\}$ применяется символ l. Мы будем использовать для этой цели символ h в честь Хевисайда. Всякую локально интегрируемую функцию $\{f(t)\}$ $(t \geqslant 0)$ можно отождествить с оператором $\left\{ \int_0^t f(s)\,ds \right\} / h$. Таким образом, отношения в поле Q представляют собой „обобщенные функции".

Скалярный оператор. Пусть α — произвольное комплексное число и $\{\alpha\}$ — функция, тождественно равная α. Оператор

$$[\alpha] = \{\alpha\}/\{1\} = \{\alpha\}/h \tag{14}$$

называется *скалярным оператором*, так как

$$[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta], \quad [\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha\beta], \quad [\alpha] \cdot \{f(t)\} = \{\alpha f(t)\}. \tag{15}$$

Доказательство. Имеем

$$[\alpha] + [\beta] = \frac{\{\alpha\}}{h} + \frac{\{\beta\}}{h} = \frac{\{\alpha + \beta\}}{h} = [\alpha + \beta],$$

$$[\alpha] \cdot [\beta] = \frac{\{\alpha\} \cdot \{\beta\}}{h^2} = \frac{\{\alpha\beta t\}}{h^2} = \frac{h \cdot \{\alpha\beta\}}{h^2} = \frac{\{\alpha\beta\}}{h} = [\alpha\beta],$$

$$[\alpha] \cdot \{f(t)\} = \frac{\{\alpha\} \cdot \{f(t)\}}{h} = \frac{\left\{ \int_0^t \alpha f(s)\,ds \right\}}{h} = \frac{h \cdot \{\alpha f(t)\}}{h} = \{\alpha f(t)\}.$$

Замечание. Как следствие мы получаем формулу

$$[\alpha]\cdot\frac{\{a(t)\}}{\{b(t)\}}=\frac{\{\alpha a(t)\}}{\{b(t)\}}, \tag{16}$$

т. е. действие оператора $[\alpha]$ в точности совпадает с умножением на скаляр α. Поэтому скалярный оператор $\{1\}/\{1\}$ можно отождествить с оператором 1, а оператор $[\alpha]$ — с числом α.

Оператор дифференцирования. Обозначим оператор $1/h$ символом s:

$$s=1/h=1/\{1\}. \tag{17}$$

Оператор s называется *оператором дифференцирования*, потому что если функция $f=\{f(t)\}\in C$ имеет непрерывную производную $f'=\{f'(t)\}$, то

$$sf=f'+f(0), \quad \text{где} \quad f(0)=\{f(0)\}/h. \tag{18}$$

Доказательство. Умножим обе части равенства

$$\{f(t)\}=\{f(0)\}+\left\{\int_0^t f'(s)\,ds\right\}=h\cdot f(0)+h\cdot\{f'(t)\}$$

на s и используем то, что $s\cdot h=h\cdot s=1$.

Следствие 1. Если функция $f=\{f(t)\}$ имеет непрерывную производную n-го порядка $f^{(n)}=\{f^{(n)}(t)\}$, то

$$f^{(n)}=s^n\cdot f-s^{n-1}\cdot f(0)-s^{n-2}\cdot f'(0)-\ldots-s\cdot f^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0), \tag{19}$$

где $f^{(j)}(0)$ — оператор умножения на $f^{(j)}(0)$, т. е. $f^{(j)}(0)=\{f^{(j)}(0)\}/h$.

Доказательство. При $n=2$ мы имеем

$$s^2\cdot f=s\cdot(s\cdot f)=s\cdot(f'+f(0))=$$
$$=s\cdot f'+s\cdot f(0)=f''+f'(0)+s\cdot f(0).$$

В общем случае доказательство проводится по индукции.

Следствие 2. Имеет место формула

$$1/(s-\alpha)=\{e^{\alpha t}\} \tag{20}$$

и более общее соотношение

$$\frac{1}{(s-\alpha)^n}=\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}\right\} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{21}$$

Доказательство. Согласно (18), $s \cdot \{e^{\alpha t}\} = \{\alpha e^{\alpha t}\} + 1 = \alpha \cdot \{e^{\alpha t}\} + 1$; таким образом, формула (20) доказана. Далее,

$$1/(s-\alpha)^2 = \{e^{\alpha t}\} \cdot \{e^{\alpha t}\} = \left\{ \int_0^t e^{\alpha(t-s)} e^{\alpha s}\, ds \right\} = \left\{ e^{\alpha t} \int_0^t ds \right\} = \left\{ \frac{t}{1!} e^{\alpha t} \right\}.$$

Продолжая таким образом, получим общую формулу (21).

Приложение к интегрированию линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Мы проиллюстрируем эти приложения на примерах.

Пример 1. Требуется решить уравнение

$$x''(t) - x'(t) - 6x(t) = 2, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

Решение. Запишем это уравнение в операторной форме

$$x''(t) - x'(t) - 6x(t) = 2/s.$$

Тогда, учитывая (19), получаем

$$s^2 \cdot x - s \cdot x(0) - x'(0) - s \cdot x + x(0) - 6x = 2/s.$$

Подставляя начальные значения, мы приходим к уравнению

$$s^2 x - s - s \cdot x + 1 - 6x = 2/s, \quad \text{т. е.} \quad (s^2 - s - 6) \cdot x = s - 1 + 2/s.$$

Теперь применяем формулу (20):

$$x = \frac{s^2 - s + 2}{s \cdot (s-3) \cdot (s+2)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s} + \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{s-3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{s+2} =$$
$$= \left\{ -\frac{1}{3} + \frac{8}{15} e^{3t} + \frac{4}{5} e^{-2t} \right\}.$$

Пример 2. Пусть λ — произвольная отличная от нуля постоянная. Требуется решить уравнение

$$x''(t) + \lambda^2 x(t) = 0, \quad x(0) = \alpha, \quad x'(0) = \beta.$$

Решение. В операторной форме это уравнение запишется так:

$$s^2 \cdot x - \alpha s - \beta + \lambda^2 x = 0, \quad \text{т. е.} \quad (s^2 + \lambda^2) \cdot x = \alpha s + \beta.$$

Разлагая на простейшие дроби, получаем

$$x = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \lambda^2} = \frac{\gamma}{s + i\lambda} + \frac{\delta}{s - i\lambda},$$

где $\alpha s+\beta=\gamma(s-i\lambda)+\delta(s+i\lambda)$, т. е.

$$\gamma=2^{-1}\left(\alpha+\frac{i\beta}{\lambda}\right),\quad \delta=2^{-1}\left(\alpha-\frac{i\beta}{\lambda}\right).$$

Следовательно,

$$x=\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{i\beta}{\lambda}\right)\frac{1}{s+i\lambda}+\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{i\beta}{\lambda}\right)\frac{1}{s-i\lambda}=$$
$$=\left\{\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{i\beta}{\lambda}\right)e^{-i\lambda t}+\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{i\beta}{\lambda}\right)e^{i\lambda t}\right\}=\left\{\alpha\cos\lambda t+\frac{\beta}{\lambda}\sin\lambda t\right\}.$$

Пример 3. Требуется решить систему уравнений

$$x'(t)-\alpha x(t)-\beta y(t)=\beta e^{\alpha t},\quad y'(t)+\beta x(t)-\alpha y(t)=0$$

с начальными условиями $x(0)=0$, $y(0)=1$.

Решение. Решая уравнения в операторной форме

$$s\cdot x-\alpha x-\beta y=\beta/(s-\alpha),\quad s\cdot y-1+\beta x-\alpha y=0,$$

получаем

$$x=\frac{2\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2},\qquad y=\frac{(s-\alpha)^2-\beta^2}{(s-\alpha)\cdot((s-\alpha)^2+\beta^2)},$$

откуда

$$x=\frac{1}{i}\left\{\frac{1}{s-\alpha-i\beta}-\frac{1}{s-\alpha+i\beta}\right\}=\frac{1}{i}\left\{e^{(\alpha+i\beta)t}-e^{(\alpha-i\beta)t}\right\}=\left\{2e^{\alpha t}\sin\beta t\right\},$$

$$y=\frac{2(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\beta^2}-\frac{1}{s-\alpha}=\frac{1}{s-\alpha-i\beta}+\frac{1}{s-\alpha+i\beta}-\frac{1}{s-\alpha}=$$
$$=\left\{e^{(\alpha+i\beta)t}+e^{(\alpha-i\beta)t}-e^{\alpha t}\right\}=\left\{e^{\alpha t}(2\cos\beta t-1)\right\}.$$

Дальнейшее развитие этого метода и приложения см. у Микусинского [1], [2*], а также Эрдейи [1].

7. Лемма Соболева

Всякая обобщенная функция бесконечно дифференцируема в обобщенном смысле (см. гл. 1, § 8). Поэтому дифференцируемость в обобщенном смысле не связана непосредственно с обычной дифференцируемостью. Однако имеет место следующий результат, весьма важный для современного подхода к уравнениям в частных производных.

Теорема (лемма Соболева). Пусть G — ограниченная открытая область пространства R^n. Допустим, что функция $u(x)$ принадлежит $W^k(G)$ при $k>2^{-1}n+\sigma$, где σ — неотрицательное целое число. Таким образом, мы предполагаем, что все обобщенные производные