где $\alpha s+\beta=\gamma(s-i\lambda)+\delta(s+i\lambda)$, т. е.

$$\gamma=2^{-1}\left(\alpha+\frac{i\beta}{\lambda}\right),\quad \delta=2^{-1}\left(\alpha-\frac{i\beta}{\lambda}\right).$$

Следовательно,

$$x=\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{i\beta}{\lambda}\right)\frac{1}{s+i\lambda}+\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{i\beta}{\lambda}\right)\frac{1}{s-i\lambda}=$$

$$=\left\{\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{i\beta}{\lambda}\right)e^{-i\lambda t}+\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{i\beta}{\lambda}\right)e^{i\lambda t}\right\}=\left\{\alpha\cos\lambda t+\frac{\beta}{\lambda}\sin\lambda t\right\}.$$

Пример 3. Требуется решить систему уравнений

$$x'(t)-\alpha x(t)-\beta y(t)=\beta e^{\alpha t},\quad y'(t)+\beta x(t)-\alpha y(t)=0$$

с начальными условиями $x(0)=0$, $y(0)=1$.

Решение. Решая уравнения в операторной форме

$$s\cdot x-\alpha x-\beta y=\beta/(s-\alpha),\quad s\cdot y-1+\beta x-\alpha y=0,$$

получаем

$$x=\frac{2\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2},\qquad y=\frac{(s-\alpha)^2-\beta^2}{(s-\alpha)\cdot((s-\alpha)^2+\beta^2)},$$

откуда

$$x=\frac{1}{i}\left\{\frac{1}{s-\alpha-i\beta}-\frac{1}{s-\alpha+i\beta}\right\}=\frac{1}{i}\left\{e^{(\alpha+i\beta)t}-e^{(\alpha-i\beta)t}\right\}=\left\{2e^{\alpha t}\sin\beta t\right\},$$

$$y=\frac{2(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\beta^2}-\frac{1}{s-\alpha}=\frac{1}{s-\alpha-i\beta}+\frac{1}{s-\alpha+i\beta}-\frac{1}{s-\alpha}=$$

$$=\left\{e^{(\alpha+i\beta)t}+e^{(\alpha-i\beta)t}-e^{\alpha t}\right\}=\left\{e^{\alpha t}(2\cos\beta t-1)\right\}.$$

Дальнейшее развитие этого метода и приложения см. у Микусинского [1], [2*], а также Эрдейи [1].

7. Лемма Соболева

Всякая обобщенная функция бесконечно дифференцируема в обобщенном смысле (см. гл. 1, § 8). Поэтому дифференцируемость в обобщенном смысле не связана непосредственно с обычной дифференцируемостью. Однако имеет место следующий результат, весьма важный для современного подхода к уравнениям в частных производных.

Теорема (лемма Соболева). Пусть G — ограниченная открытая область пространства R^n. Допустим, что функция $u(x)$ принадлежит $W^k(G)$ при $k>2^{-1}n+\sigma$, где σ — неотрицательное целое число. Таким образом, мы предполагаем, что все обобщенные производные функции $u(x)$ до порядка k включительно принадлежат $L^2(G)$. Тогда для всякого открытого подмножества G_1 области G, замыкание которого G_1^a образует бикомпактное подмножество области G, существует такая функция $u_1(x) \in C^\sigma(G_1)$, что почти всюду в G_1 выполняется равенство $u(x) = u_1(x)$.

Доказательство. Выберем из $C_0^\infty(R^n)$ функцию $\alpha(x)$, удовлетворяющую условиям

$$G_1 \subseteq \operatorname{supp}(\alpha) \subseteq G, \ 0 \leqslant \alpha(x) \leqslant 1 \text{ и } \alpha(x) = 1 \text{ при } x \in G_1.$$

Определим на пространстве R^n вспомогательную функцию $v(x)$:

$$v(x) = \alpha(x) u(x) \text{ при } x \in G; \ v(x) = 0 \text{ при } x \in R^n - G.$$

Тогда $v(x) = u(x)$ при всех $x \in G_1$. Так как функция $v(x)$ локально интегрируема в R^n, она определяет некоторую обобщенную функцию, принадлежащую $\mathfrak{D}(R^n)'$. Из предположения $u \in W^k(G)$ следует, что обобщенные производные $D^s v(x) \in L^2(R^n)$ при $|s| \leqslant k$. Например, обобщенная производная

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(v) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha u) = \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} \cdot u + \alpha \frac{\partial}{\partial x_j} u$$

принадлежит $L^2(R^n)$, потому что обе функции u и $\partial u / \partial x_j$ принадлежат $L^2(G)$, а функция $\alpha(x)$ бесконечно дифференцируема и ее носитель содержится в некотором бикомпактном подмножестве открытой области G.

Преобразование Фурье $v(x) \to \hat{v}(y)$ приводит к равенству

$$(\widehat{D^s v})(y) = (i)^{|s|} y_1^{s_1} y_2^{s_2} \ldots y_n^{s_n} \cdot \hat{v}(y).$$

По теореме Планшереля преобразование Фурье сохраняет L^2-норму, поэтому $(\widehat{D^s v})(y) \in L^2(R^n)$ при $|s| \leqslant k$. Таким образом,

$$\hat{v}(y) y_1^{s_1} y_2^{s_2} \ldots y_n^{s_n} \in L^2(R^n) \text{ при } |s| \leqslant k. \tag{1}$$

В частности,

$$\hat{v}(y) \in L^2(R^n). \tag{1'}$$

Возьмем систему неотрицательных целых чисел $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Из (1) следует, что

$$\hat{v}(y) y_1^{q_1} y_2^{q_2} \ldots y_n^{q_n} \text{ интегрируема по } R^n \text{ при всех } |q| + \frac{n}{2} < k. \tag{2}$$

В самом деле, возьмем любое положительное число C. Применяя неравенство Шварца, получаем

$$\int\limits_{|y|\leqslant C} \left|\hat{v}(y)\, y_1^{q_1} y_2^{q_2} \dots y_n^{q_n}\right| dy \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{|y|\leqslant C} \left|y_1^{q_1} y_2^{q_2} \dots y_n^{q_n}\right|^2 dy \cdot \int\limits_{|y|\leqslant C} |\hat{v}(y)|^2 dy \right)^{1/2} < \infty,$$

$$\int\limits_{|y|> C} \left|\hat{v}(y)\, y_1^{q_1} y_2^{q_2} \dots y_n^{q_n}\right| dy \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{|y|> C} \left|(1+|y|^2)^{-k/2}\, y_1^{q_1} y_2^{q_2} \dots y_n^{q_n}\right|^2 dy \times \right.$$
$$\left. \times \int\limits_{|y|> C} \left|\hat{v}(y)(1+|y|^2)^{k/2}\right|^2 dy \right)^{1/2}.$$

Второй сомножитель в правой части последнего неравенства, согласно (1), конечен. Первый множитель тоже конечен, если

$$2|q| - 2k + n - 1 < -1, \text{ т. е. если } k > \frac{n}{2} + |q|,$$

так как

$$dy = dy_1\, dy_2 \dots dy_n = r^{n-1}\, dr\, d\Omega_n, \tag{3}$$

где $d\Omega_n$ — элемент гиперповерхности единичной сферы пространства R^n с центром в начале координат. По теореме Планшереля

$$v(x) = \underset{h\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\, (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{|y|\leqslant h} \hat{v}(y) \exp(i\langle y, x\rangle)\, dy;$$

поэтому, так же как при доказательстве полноты пространства $L^2(R^n)$, мы можем выбрать последовательность $\{h'\}$ положительных целых чисел h так, что для почти всех точек $x \in R^n$

$$v(x) = \lim_{h'\to\infty} (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{|y|\leqslant h'} \hat{v}(y) \exp(i\langle y, x\rangle)\, dy.$$

Но, как показано выше, функция $\hat{v}(y)$ интегрируема по всему пространству R^n, поэтому правая часть последнего равенства равна

$$v_1(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R^n} \hat{v}(y) \exp(i\langle x, y\rangle)\, dy,$$

т. е. $v(x)$ для почти всех значений $x \in R^n$ совпадает с $v_1(x)$. Условие (2) позволяет дифференцировать выражение для $v_1(x)$ под знаком интеграла до порядка σ включительно, причем результат дифференцирования непрерывен по x. Полагая $u_1(x) = v_1(x)$ при $x \in G_1$, мы завершаем доказательство теоремы.

Замечание. Первоначальное доказательство этой теоремы, принадлежащее С. Л. Соболеву, можно найти в работах Соболева [1], [2], Канторовича — Акилова [1].

8. Неравенство Гординга

Рассмотрим интегральную квадратичную форму для функции $u(x)=u(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in C^\infty$, имеющей бикомпактный носитель, принадлежащий ограниченной области G пространства R^n:

$$B[u, u]=\sum_{|s|, |t|\leqslant m}(c_{st}D^s u, D^t u)_0, \tag{1}$$

где комплекснозначные коэффициенты c_{st} непрерывны в замыкании G^a области G, а $(u, v)_0$ — скалярное произведение в $L^2(G)$.

Имеет место следующая

Теорема (Гординг [1]). Для того чтобы существовали положительные постоянные c, C, такие, что неравенство

$$\| u \|_m^2 \leqslant c \operatorname{Re} B[u, u]+C\| u \|_0^2 \tag{2}$$

выполняется при всех функциях $u\in C_0^\infty(G)$, достаточно, чтобы для некоторой положительной постоянной c_0

$$\operatorname{Re}\sum_{|s|, |t|=m} c_{st}\xi^s\xi^t \geqslant c_0|\xi|^{2m} \tag{3}$$

для всех $x\in G$ и всех вещественных векторов $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$.

Замечание. Неравенство (2) называется *неравенством Гординга.* Если условие (3) выполняется и коэффициенты $c_{st}\in C^m$ в области G^a, то дифференциальный оператор

$$L=\sum_{|s|, |t|\leqslant m} D^t c_{st} D^s \tag{4}$$

называется *сильно эллиптическим* в G.

Доказательство. Сначала мы покажем, что для всякого $\varepsilon>0$ найдется постоянная $C(\varepsilon)>0$, такая, что для любой функции $u\in C_0^\infty(G)$ выполняется неравенство

$$\| u \|_{m-1}^2 \leqslant \varepsilon \| u \|_m^2 + C(\varepsilon)\| u \|_0. \tag{5}$$

Чтобы убедиться в этом, мы будем считать, что $u\in C_0^\infty(R^n)$, полагая $u=0$ вне G. Применяя преобразование Фурье и теорему Планшереля, получаем

$$\| D^s u \|_0^2 = \| \widehat{(D^s u)} \|_0^2 = \int_{R^n} \Big|\prod_{j=1}^n y_j^{s_j}\hat{u}(y)\Big|^2 dy.$$