Замечание. Первоначальное доказательство этой теоремы, принадлежащее С. Л. Соболеву, можно найти в работах Соболева [1], [2], Канторовича — Акилова [1].

8. Неравенство Гординга

Рассмотрим интегральную квадратичную форму для функции $u(x)=u(x_1, x_2, \dots, x_n)\in C^\infty$, имеющей бикомпактный носитель, принадлежащий ограниченной области G пространства R^n:

$$B[u, u]=\sum_{|s|, |t|\leqslant m}(c_{st}D^s u, D^t u)_0, \tag{1}$$

где комплекснозначные коэффициенты c_{st} непрерывны в замыкании G^a области G, а $(u, v)_0$ — скалярное произведение в $L^2(G)$.

Имеет место следующая

Теорема (Гординг [1]). Для того чтобы существовали положительные постоянные c, C, такие, что неравенство

$$\|u\|_m^2\leqslant c\operatorname{Re}B[u, u]+C\|u\|_0^2 \tag{2}$$

выполняется при всех функциях $u\in C_0^\infty(G)$, достаточно, чтобы для некоторой положительной постоянной c_0

$$\operatorname{Re}\sum_{|s|, |t|=m}c_{st}\xi^s\xi^t\geqslant c_0|\xi|^{2m} \tag{3}$$

для всех $x\in G$ и всех вещественных векторов $\xi=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$.

Замечание. Неравенство (2) называется *неравенством Гординга*. Если условие (3) выполняется и коэффициенты $c_{st}\in C^m$ в области G^a, то дифференциальный оператор

$$L=\sum_{|s|, |t|\leqslant m}D^t c_{st}D^s \tag{4}$$

называется *сильно эллиптическим* в G.

Доказательство. Сначала мы покажем, что для всякого $\varepsilon>0$ найдется постоянная $C(\varepsilon)>0$, такая, что для любой функции $u\in C_0^\infty(G)$ выполняется неравенство

$$\|u\|_{m-1}^2\leqslant\varepsilon\|u\|_m^2+C(\varepsilon)\|u\|_0. \tag{5}$$

Чтобы убедиться в этом, мы будем считать, что $u\in C_0^\infty(R^n)$, полагая $u=0$ вне G. Применяя преобразование Фурье и теорему Планшереля, получаем

$$\|D^s u\|_0^2=\|\widehat{(D^s u)}\|_0^2=\int_{R^n}\Big|\prod_{j=1}^n y_j^{s_j}\hat{u}(y)\Big|^2dy.$$

Таким образом, неравенство (5) следует из того, что выражение

$$\left(\sum_{|s|\leqslant m-1}\prod_{j=1}^{n} y_j^{2s_j}\right)\Big/\left(C+\sum_{|t|\leqslant m}\prod_{j=1}^{n} y_j^{2t_j}\right),$$

где $|s|=\sum_{j=1}^{n} s_j$, $|t|=\sum_{j=1}^{n} t_j$, стремится к нулю равномерно относительно переменных $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ при $C\uparrow\infty$.

Допустим, что коэффициенты c_{st} постоянны и отличны от нуля только при $|s|=|t|=m$. Применяя преобразование Фурье $u(x)\to\to\hat{u}(\xi)$ и теорему Планшереля, а также учитывая (3), мы приходим к неравенству

$$\operatorname{Re} B[u, u]=\operatorname{Re}\int\sum_{s,\,t} c_{st}\xi^s\xi^t|\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi\geqslant$$
$$\geqslant\int c_0|\xi|^{2m}|\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi\geqslant c_1\left(\|u\|_m^2-\|u\|_{m-1}^2\right),$$

где $c_1>0$ — постоянная, не зависящая от u. Таким образом, в данном частном случае условие (2) выполняется, так как справедливо условие (5).

Теперь перейдем к случаю переменных коэффициентов c_{st}. Вначале допустим, что носитель функции u содержится в некотором шаре достаточно малого радиуса с центром в начале координат. Используя полученный ранее результат, мы приходим к неравенству

$$c_0'\|u\|_m^2\leqslant\operatorname{Re} B[u, u]+\operatorname{Re}\sum_{|s|=|t|=m}\int(c_{st}(0)-c_{st}(x))D^s u\cdot D^t\bar{u}\,dx-$$
$$-\operatorname{Re}\sum_{|s|+|t|<2m}\int c_{st}(x)D^s u\cdot D^t\bar{u}\,dx+C(\varepsilon)\|u\|_0^2,$$

где $c_0'>0$—некоторая постоянная, не зависящая от u. Если носитель функции u расположен в столь малом шаре, что колебания функций c_{st} в пределах этого множества достаточно малы, то второе слагаемое в правой части будет не больше чем $2^{-1}c_0'\|u\|_m^2$. Третье слагаемое в правой части не превосходит величины $\|u\|_m\cdot\|u\|_{m-1}$, умноженной на некоторую положительную постоянную. Следовательно,

$$2^{-1}c_0'\|u\|_m^2\leqslant\operatorname{Re} B[u, u]+\text{constant}\cdot\|u\|_m\cdot\|u\|_{m-1}+C(\varepsilon)\|u\|_0^2,$$

где „constant" здесь и далее обозначает положительные постоянные. Тогда, поскольку неравенство

$$2|\alpha|\cdot|\beta|\leqslant\varepsilon|\alpha|^2+\varepsilon^{-1}|\beta|^2\tag{6}$$

выполняется при любом $\varepsilon > 0$, мы получаем оценку вида

$$\| u \|_m^2 \leqslant \text{constant} \cdot \operatorname{Re} B[u, u] + \text{constant} \cdot \| u \|_{m-1}^2 + C(\varepsilon) \cdot \| u \|_0^2,$$

откуда, учитывая (5), мы выводим условие (2).

Наконец, перейдем к общему случаю. Построим разбиение единицы в области G:

$$1 = \sum_{j=1}^{N} \omega_j^2, \qquad \omega_j \in C_0^\infty(G) \quad \text{и} \quad \omega_j(x) \geqslant 0 \quad \text{при } x \in G,$$

так, чтобы носители всех функций ω_j были заключены в достаточно малом шаре с центром в начале координат. Тогда, применяя правило Лейбница дифференцирования произведения функций, неравенство Шварца и выведенную ранее оценку, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} B[u, u] &= \operatorname{Re} \sum_{s, t} \int c_{st} D^s u D^t \bar{u} \, dx = \operatorname{Re} \sum_{s, t} \sum_j \int \omega_j^2 c_{st} D^s u D^t \bar{u} \, dx = \\ &= \operatorname{Re} \sum_j \sum_{s, t} c_{st} D^s (\omega_j u) D^t (\overline{\omega_j u}) \, dx + O(\| u \|_m \cdot \| u \|_{m-1}) \geqslant \\ &\geqslant \sum_j \text{constant} \left(\| \omega_j u \|_m^2 - \| \omega_j u \|_{m-1}^2 \right) + O\left(\| u \|_m \cdot \| u \|_{m-1} \right) \geqslant \\ &\geqslant \text{constant} \cdot \| u \|_m^2 + O\left(\| u \|_m \cdot \| u \|_{m-1} \right). \end{aligned}$$

Далее, применяя неравенство (5), мы приходим к условию (2). Заметим, что постоянные c, C в формуле (2) зависят от области G, так как они связаны с c_0 и c_{st}.

9. Теорема Фридрихса

Рассмотрим сильно эллиптический оператор

$$L = \sum_{|s|, |t| \leqslant m} D^s c_{st}(x) D^t \tag{1}$$

с вещественными коэффициентами $c_{st}(x) \in C^\infty$, определенными в ограниченной открытой области G пространства R^n. Пусть функция $f(x)$ с локально интегрируемым квадратом определена в области G. Функция $u(x)$ с локально интегрируемым квадратом в области G называется *обобщенным решением* уравнения

$$Lu = f, \tag{2}$$

если

$$(u, L^*\varphi)_0 = (f, \varphi)_0, \quad \text{где} \quad L^* = \sum_{|s|, |t| \leqslant m} (-1)^{|s|+|t|} D^t c_{st}(x) D^s, \tag{3}$$