выполняется при любом $\varepsilon > 0$, мы получаем оценку вида

$$\|u\|_m^2 \leqslant \text{constant} \cdot \operatorname{Re} B[u, u] + \text{constant} \cdot \|u\|_{m-1}^2 + C(\varepsilon) \cdot \|u\|_0^2,$$

откуда, учитывая (5), мы выводим условие (2).

Наконец, перейдем к общему случаю. Построим разбиение единицы в области G:

$$1 = \sum_{j=1}^{N} \omega_j^2, \qquad \omega_j \in C_0^\infty(G) \quad \text{и} \quad \omega_j(x) \geqslant 0 \quad \text{при } x \in G,$$

так, чтобы носители всех функций ω_j были заключены в достаточно малом шаре с центром в начале координат. Тогда, применяя правило Лейбница дифференцирования произведения функций, неравенство Шварца и выведенную ранее оценку, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} B[u, u] &= \operatorname{Re} \sum_{s,\,t} \int c_{st} D^s u D^t \bar{u}\, dx = \operatorname{Re} \sum_{s,\,t} \sum_j \int \omega_j^2 c_{st} D^s u D^t \bar{u}\, dx = \\ &= \operatorname{Re} \sum_j \sum_{s,\,t} c_{st} D^s(\omega_j u) D^t (\overline{\omega_j u})\, dx + O(\|u\|_m \cdot \|u\|_{m-1}) \geqslant \\ &\geqslant \sum_j \text{constant}\left(\|\omega_j u\|_m^2 - \|\omega_j u\|_{m-1}^2\right) + O\left(\|u\|_m \cdot \|u\|_{m-1}\right) \geqslant \\ &\geqslant \text{constant} \cdot \|u\|_m^2 + O\left(\|u\|_m \cdot \|u\|_{m-1}\right). \end{aligned}$$

Далее, применяя неравенство (5), мы приходим к условию (2). Заметим, что постоянные c, C в формуле (2) зависят от области G, так как они связаны с c_0 и c_{st}.

9. Теорема Фридрихса

Рассмотрим сильно эллиптический оператор

$$L = \sum_{|s|,\,|t| \leqslant m} D^s c_{st}(x) D^t \tag{1}$$

с вещественными коэффициентами $c_{st}(x) \in C^\infty$, определенными в ограниченной открытой области G пространства R^n. Пусть функция $f(x)$ с локально интегрируемым квадратом определена в области G. Функция $u(x)$ с локально интегрируемым квадратом в области G называется *обобщенным решением* уравнения

$$Lu = f, \tag{2}$$

если

$$(u, L^*\varphi)_0 = (f, \varphi)_0, \quad \text{где} \quad L^* = \sum_{|s|,\,|t| \leqslant m} (-1)^{|s|+|t|} D^t c_{st}(x) D^s, \tag{3}$$

для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Выражение $(f, g)_0$ обозначает здесь скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L^2(G)$. Обобщенные решения, таким образом, понимаются в смысле теории обобщенных функций.

В отношении дифференцируемости обобщенных решений справедлив следующий важный результат.

Теорема (Фридрихс [1]). В области $G_1 \Subset G$, где функция f имеет интегрируемые с квадратом обобщенные производные до порядка p включительно, всякое обобщенное решение уравнения (2) обладает интегрируемыми с квадратом обобщенными производными до порядка $(2m+p)$ включительно. Иными словами, если f принадлежит $W^p(G_1)$, то обобщенное решение u уравнения (2) принадлежит $W^{p+2m}(G_1)$.

Следствие. Если $p = \infty$, то по лемме Соболева существует такая функция $u_0(x) \in C^\infty(G_1)$, что $u(x) = u_0(x)$ для почти всех $x \in G_1$. Поэтому после поправки на множестве меры нуль обобщенное решение $u(x)$ уравнения (2) будет принадлежать C^∞ во всякой подобласти области G, в которой $f(x) \in C^\infty$. Следовательно, такое исправленное решение в области, где $f(x) \in C^\infty$, представляет собой *классическое решение* (т. е. решение в смысле обычного, а не обобщенного дифференцирования) дифференциального уравнения (2).

Замечание. Если $L = \Delta$ (оператор Лапласа), то сформулированное выше следствие совпадает с леммой Вейля (см. гл. II, § 7). Имеется обширная литература, касающаяся обобщений леммы Вейля для произвольных эллиптических операторов L; такие обобщения часто называют теоремами Вейля — Шварца. Мы ограничимся здесь указанием на работы П. Лакса [2] и Ниренберга [1], [2].

Приведенное ниже доказательство принадлежит автору (не опубликовано). Сходное доказательство предложил Берс [1]. Следует заметить, что всякую недифференцируемую локально интегрируемую функцию $f(x)$ можно рассматривать как обобщенное решение *гиперболического уравнения*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 0;$$

это следует из формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y\, \partial x} dy \right\} dx = 0 \quad \left(\varphi(x, y) \in C_0^\infty(R^2)\right).$$

Доказательство теоремы Фридрихса. Для наших целей достаточно ограничиться рассмотрением вещественных функций. Мы можем также допустить, что сильно эллиптический оператор L удовлетворяет неравенству Гординга

$$\begin{aligned} &(\varphi, L^*\varphi)_0 \geqslant \delta \|\varphi\|_m^2 \qquad (\delta > 0), \\ &|(\varphi, L^*\psi)_0| \leqslant \gamma \|\varphi\|_m \cdot \|\psi\|_m \qquad (\gamma > 0) \end{aligned} \tag{4}$$

для любых $\varphi, \psi \in C_0^\infty(G)$. Если это не так, можно заменить L оператором $I + \alpha L$, подобрав подходящую константу $\alpha \neq 0$. Второе из написанных неравенств легко выводится с помощью интегрирования по частям. Мы считаем здесь, что все производные коэффициентов $c_{st}(x)$ до порядка m включительно ограничены в области G, так что постоянные δ и γ не зависят от выбора основных функций $\varphi, \psi \in C_0^\infty(G)$.

Предположим, что область G_1 представляет собой параллелепипед

$$0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

и что все коэффициенты оператора L и функции f периодичны по каждой из переменных x_j с периодом 2π. При этих условиях можно считать, что функции $\varphi(x)$ заданы на бикомпактном пространстве без границы, а именно на n-мерном торе G_1, определяемом формулой (5), и обобщенные функции, принадлежащие $C^\infty(G_1)'$, соответствуют пространству основных функций $\varphi \in C^\infty(G_1)$, состоящему из всех функций $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^\infty$, периодических по каждой из переменных x_j с периодом 2π. Заметим, что, поскольку G_1 — область без границы, нет необходимости накладывать дополнительные ограничения на носители основных функций $\varphi(x)$.

Условие $v \in W^q(G_1)$ в наших предположениях означает, что для коэффициентов Фурье v_k функции $v(x)$, входящих в разложение Фурье

$$v(x) \sim \sum_k v_k \exp(ik \cdot x)$$

$$\left(k = (k_1, \ldots, k_n), \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \quad \text{и} \quad k \cdot x = \sum_{j=1}^n k_j x_j\right), \tag{6}$$

выполняется условие

$$\sum_k |v_k|^2 (1 + |k|^2)^q < \infty \qquad \left(|k|^2 = \sum_{j=1}^n k_j^2\right). \tag{7}$$

В самом деле, интегрируя по частям, мы легко обнаруживаем, что коэффициенты Фурье обобщенной производной $D^s v$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$(D^s v(x), \exp(ik \cdot x))_0 = (-1)^{|s|} (v(x), D^s \exp(ik \cdot x))_0 =$$

$$= (-1)^{|s|} \prod_{j=1}^n k_j^{s_j} v_k, \quad \text{где} \quad s = (s_1, s_2, \ldots, s_n).$$

Применяя теперь равенство Парсеваля к коэффициентам Фурье функции $D^q v \in L^2(G_1)$, мы получаем соотношение (7).

Для дальнейшего удобно ввести пространства $W^q(G_1)$ с любыми целыми показателями q, считая, что последовательность $\{w_k;\ k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)\}$ комплексных чисел w_k, обладающая свойством

$w_k = \overline{w}_{-k}$, принадлежит $W^q(G_1)$, если для нее выполняется требование (7). В таком пространстве $W^q(G_1)$ можно ввести норму $\|\{w_k\}\|_q = \left(\sum_k |w_k|^2 (1+|k|^2)^q\right)^{1/2}$. Если применить равенство Парсеваля к полной ортонормированной системе $\{(2\pi)^{-n/2}\exp(ik\cdot x)\}$ пространства $L^2(G_1)$, то легко обнаружить, что при $q \geqslant 0$ норма $\|v\|_q = \left(\sum_{|s|\leqslant q}\int_{G_1} |D^s v(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$ эквивалентна норме $\|\{v_k\}\|_q$, где $v(x) \sim \sum_k v_k \exp(ik\cdot x)$.

Из приведенного доказательства неравенства (7) видно, что если $f \in W^p(G_1)$, то $D^s f \in W^{p-|s|}(G_1)$ и $\varphi f \in W^p(G_1)$ для функций $\varphi \in C_0^\infty(G_1)$. Следовательно,

$$\text{если } f \in W^p(G_1), \text{ то для любого дифференциального оператора } N \text{ порядка } q \text{ с коэффициентами из } C_0^\infty(G_1) \text{ мы имеем } Nf \in W^{p-|q|}(G_1). \tag{8}$$

Для того чтобы доказать теорему в рассматриваемом сейчас случае периодических функций, мы сначала покажем, что можно, не ограничивая общности, считать обобщенное решение $u \in L^2(G_1) = W^0(G_1)$ уравнения (2) принадлежащим $W^m(G_1)$. Это можно обосновать следующим образом. Положим

$$u(x) \sim \sum_k u_k \exp(ik\cdot x), \qquad v(x) \sim \sum_k u_k (1+|k^2|)^{-m} \exp(ik\cdot x),$$

где $u(x)$ — рассматриваемое решение. Тогда, как нетрудно заметить, $v(x) \in W^{2m}(G_1)$ и v представляет собой обобщенное решение уравнения $(I-\Delta)^m v = u$, где Δ — оператор Лапласа $\sum_{j=1}^n \partial^2/\partial x_j^2$. Поэтому функция $v(x)$ оказывается обобщенным решением сильно эллиптического уравнения порядка $4m$:

$$L(I-\Delta)^m v = f. \tag{2'}$$

Если мы покажем, что предположения $u \in W^m$, $Lu = f$, где L — оператор m-го порядка, влекут за собой условие $u \in W^{2m+p}$, то обобщенное решение $v \in W^{2m}(G_1)$ уравнения порядка $4m$ на самом деле будет принадлежать $W^{4m+p}(G_1)$. Тогда из условия (8) будет следовать, что $u = (I-\Delta)^m v$ принадлежит $W^{4m+p-2m}(G_1) = W^{p+2m}(G_1)$. Таким образом, допущение $u \in W^m(G_1)$, где u — рассматриваемое обобщенное решение уравнения (2), не ограничивает общности (здесь число m равно половине порядка $2m$ оператора L). Итак, будем считать, что $u \in W^m(G_1)$.

Неравенство Гординга (4) выполняется для операторов L и $(I-\Delta)^m$, поэтому мы можем применить теорему Лакса — Мильграма (гл. III, § 7), а именно билинейные формы, определенные на $C^\infty(G_1)$:

$$(\varphi, \psi)' = (\varphi, L^*\psi)_0 \quad \text{и} \quad (\varphi, \psi)'' = (\varphi, (I-\Delta)^m \psi)_0, \tag{9}$$

можно продолжить до непрерывных билинейных форм, определенных на $W^m(G_1)$, таким образом, чтобы для любых $\varphi, \psi \in W^m(G_1)$ выполнялось условие

$$(T'\varphi, \psi)' = (\varphi, \psi)_m, \qquad (T''\varphi, \psi)'' = (\varphi, \psi)_m,$$

где T' и T'' — взаимно непрерывные взаимно однозначные линейные отображения пространства $W^m(G_1)$ на себя. Но тогда $T_m = T''(T')^{-1}$ — это взаимно непрерывное взаимно однозначное линейное отображение $W^m(G_1)$ на себя, такое, что

$$(\varphi, \psi)' = (T_m\varphi, \psi)'' \quad \text{для всех} \quad \varphi, \psi \in W^m(G_1). \tag{10}$$

Можно показать, что

для любого $j \geqslant 1$ оператор T_m отображает $W^{m+j}(G_1)$ на себя взаимно однозначно и взаимно непрерывно. (11)

В самом деле,

$$\left(\varphi, L^*(I-\Delta)^j\psi\right)_0 = \left(T_m\varphi, (I-\Delta)^{m+j}\psi\right)_0 \quad \text{для всех} \quad \varphi, \psi \in C^\infty(G_1).$$

С другой стороны, если применить теорему Лакса — Мильграма к сильно эллиптическим операторам $(I-\Delta)^j L$ и $(I-\Delta)^{m+j}$, то можно установить, что существует взаимно непрерывное взаимно однозначное линейное отображение T_{m+j} пространства $W^{m+j}(G_1)$ на себя, такое, что

$$\left(\varphi, L^*(I-\Delta)^j\psi\right)_0 = \left(T_{m+j}\varphi, (I-\Delta)^{m+j}\psi\right)_0 \quad \text{для всех} \quad \varphi, \psi \in C^\infty(G_1).$$

Поэтому функция $w = (T_{m+j} - T_m)\varphi$ при любом выборе $\varphi \in C^\infty(G_1)$ является обобщенным решением уравнения $(I-\Delta)^{m+j} w = 0$. Но такое решение $w(x)$ должно тождественно равняться нулю. Действительно, коэффициенты Фурье w_k функции $w(x)$ удовлетворяют условию

$$0 = \left((I-\Delta)^{m+j} w(x), \exp(ik\cdot x)\right)_0 = \left(w(x), (I-\Delta)^{m+j}\exp(ik\cdot x)\right)_0 =$$
$$= (1+|k|^2)^{m+j}(w(x), \exp(ik\cdot x))_0 = (1+|k|^2)^{m+j} w_k,$$

и поэтому $w_k = 0$ для всех значений k. Таким образом, разность $(T_{m+j} - T_m)$ обращается в нуль на $C^\infty(G_1)$. Множество $C^\infty(G_1)$ плотно в $W^{m+j}(G_1) \subseteq W^m(G_1)$, так как множество тригонометрических полиномов $\sum_{|k|<\infty} w_k \exp(ik\cdot x)$ плотно в пространстве $W^{m+j}(G_1)$. Поэтому $T_{m+j} = T_m$ на пространстве $W^{m+j}(G_1)$.

Теперь мы можем доказать теорему о дифференцируемости для рассматриваемого периодического случая. Для $\psi \in C^\infty(G_1)$ выполняется условие

$$(f, \psi)_0 = (u, L^*\psi)_0 = (u, \psi)' = (T_m u, \psi)'' = (T_m u, (I - \Delta)^m \psi)_0.$$

Следовательно, для функций

$$T_m u \sim \sum_k c_k \exp(ik \cdot x), \qquad \psi(x) \sim \sum_k \psi_k \exp(ik \cdot x)$$

мы, применяя равенство Парсеваля, получаем

$$(T_m u, (I - \Delta)^m \psi)_0 = \sum_k c_k (1 + |k|^2)^m \bar{\psi}_k = \sum_k f_k \bar{\psi}_k.$$

Так как функция $\psi \in C^\infty(G_1)$ выбиралась произвольно, то $c_k(1 + |k|^2)^m = f_k$, и поэтому $T_m u \in W^{p+2m}(G_1)$, ибо $f \in W^p(G_1)$. Отсюда, согласно (11), $u \in W^{p+2m}(G_1)$. Следует отметить, что полученный нами вывод о том, что $u \in W^{p+2m}(G_1)$, верен даже тогда, когда $0 \geqslant p \geqslant (1 - m)$, т. е. когда $\{f_k\} \in W^p(G)$ со значением p из отрезка $0 \geqslant p \geqslant (1 - m)$. Действительно, $p + 2m \geqslant m + 1$, и поэтому можно использовать условие (11).

Теперь нужно провести заключительную часть доказательства, относящуюся к общему случаю непериодических функций. Следующие далее рассуждения принадлежат П. Лаксу [2].

Мы хотим сейчас доказать теорему о дифференцируемости в общем случае для некоторой окрестности произвольной точки x^0 области G. Пусть $\beta(x) \in C_0^\infty(G)$ — функция, равная тождественно единице в некоторой окрестности точки x^0. Обозначим βu через u'. Функция u' служит обобщенным решением уравнения

$$Lu' = \beta f + Nu, \tag{12}$$

где N — некоторый дифференциальный оператор порядка не выше $(2m - 1)$, коэффициенты которого, так же как и функция β, обращаются в нуль вне некоторой окрестности V точки x^0, причем оператор N нужно применять к u в обобщенном смысле. Обобщенную функцию $\beta f + Nu$ обозначим через f'.

Пусть параллелепипед G_1 содержит окрестность V; представим себе, что коэффициенты оператора L изменяются по прежнему закону внутри V, а вне окрестности V становятся периодическими, не теряя свойств дифференцируемости и эллиптичности. Такое видоизменение оператора L обозначим через L'. Тогда функция u' будет обобщенным решением уравнения

$$L'u' = f', \quad \text{где} \quad f' = \beta f + Nu, \tag{13}$$

в области G. К этому обобщенному решению u' можно применить результаты, полученные ранее для периодического случая. Мы можем допустить, что обобщенное решение u' принадлежит $W^m(G_1)$. Поскольку оператор N имеет порядок не выше $(2m-1)$ и его коэффициенты обращаются в нуль вне окрестности V, выражение $f'=$ $=\beta f+Nu$, согласно (8), должно удовлетворять условию

$$f' \in W^{p'}(G_1), \text{ где } p'=\min(p,\ m-(2m-1))=\min(p,\ 1-m)\geqslant 1-m.$$

Поэтому для обобщенного решения u' уравнения (13) выполняется условие

$$u' \in W^{p''}(G_1), \qquad \text{где} \quad p''=\min(p+2m,\ 1-m+2m)= \\ =\min(p+2m,\ m+1).$$

Следовательно, в некоторой окрестности V точки x^0 функция u имеет интегрируемые с квадратом обобщенные производные до порядка $p''\geqslant(m+1)$. Значит, выражение $f'=\beta f+Nu$ обладает в окрестности точки x^0 интегрируемыми с квадратом обобщенными производными до порядка

$$p'''=\min(p,\ p''-(2m-1))\geqslant\min(p,\ 2-m).$$

Еще раз применяя полученный выше результат, мы найдем, что u' в некоторой окрестности точки x^0 имеет интегрируемые с квадратом обобщенные производные до порядка

$$p^{(4)}=\min(p+2m,\ 2-m+2m)=\min(p+2m,\ m+2).$$

Повторяя этот процесс, мы установим, что в некоторой окрестности точки x^0 функция u обладает интегрируемыми с квадратом обобщенными производными до порядка $p+2m$ включительно.

10. Теорема Мальгранжа — Эренпрейса

В вопросах, связанных с существованием решений, между обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных имеется заметное различие. Классический результат Пеано утверждает, что для существования решения обыкновенного дифференциального уравнения $dy/dx=f(x,\ y)$ достаточно лишь одного условия — непрерывности функции f. Это утверждение распространяется также на уравнения высших порядков и на системы уравнений. Однако для уравнений в частных производных дело обстоит совсем не так. В 1957 г. Леви [1] построил уравнение

$$-i\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}-2(x_1+ix_2)\frac{\partial u}{\partial x_3}=f(x_3),$$

которое вовсе не имеет решений, даже при $f\in C^\infty$, если только функция f не аналитическая. Пример Леви привел Хёрмандера [3]