в области G. К этому обобщенному решению u' можно применить результаты, полученные ранее для периодического случая. Мы можем допустить, что обобщенное решение u' принадлежит $W^m(G_1)$. Поскольку оператор N имеет порядок не выше $(2m-1)$ и его коэффициенты обращаются в нуль вне окрестности V, выражение $f' = \beta f + Nu$, согласно (8), должно удовлетворять условию

$$f' \in W^{p'}(G_1), \text{ где } p' = \min(p,\ m-(2m-1)) = \min(p,\ 1-m) \geqslant 1-m.$$

Поэтому для обобщенного решения u' уравнения (13) выполняется условие

$$u' \in W^{p''}(G_1), \qquad \text{где} \quad p'' = \min(p+2m,\ 1-m+2m) = \min(p+2m,\ m+1).$$

Следовательно, в некоторой окрестности V точки x^0 функция u имеет интегрируемые с квадратом обобщенные производные до порядка $p'' \geqslant (m+1)$. Значит, выражение $f' = \beta f + Nu$ обладает в окрестности точки x^0 интегрируемыми с квадратом обобщенными производными до порядка

$$p''' = \min(p,\ p'' - (2m-1)) \geqslant \min(p,\ 2-m).$$

Еще раз применяя полученный выше результат, мы найдем, что u' в некоторой окрестности точки x^0 имеет интегрируемые с квадратом обобщенные производные до порядка

$$p^{(4)} = \min(p+2m,\ 2-m+2m) = \min(p+2m,\ m+2).$$

Повторяя этот процесс, мы установим, что в некоторой окрестности точки x^0 функция u обладает интегрируемыми с квадратом обобщенными производными до порядка $p+2m$ включительно.

10. Теорема Мальгранжа — Эренпрейса

В вопросах, связанных с существованием решений, между обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных имеется заметное различие. Классический результат Пеано утверждает, что для существования решения обыкновенного дифференциального уравнения $dy/dx = f(x, y)$ достаточно лишь одного условия — непрерывности функции f. Это утверждение распространяется также на уравнения высших порядков и на системы уравнений. Однако для уравнений в частных производных дело обстоит совсем не так. В 1957 г. Леви [1] построил уравнение

$$-i\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} - 2(x_1 + ix_2)\frac{\partial u}{\partial x_3} = f(x_3),$$

которое вовсе не имеет решений, даже при $f \in C^\infty$, если только функция f не аналитическая. Пример Леви привел Хёрмандера [3] к развитию систематического метода построения линейных дифференциальных уравнений в частных производных, не имеющих решений. Важно, таким образом, выделить классы линейных уравнений в частных производных, для которых решения существуют.

Обозначим через $P(\xi)$ многочлен относительно переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, и пусть $P(D)$ — линейный дифференциальный оператор, который получается при замене переменных ξ_j операторами $D_j = i^{-1}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$. Оператор $P(D)$ можно записать в виде

$$P(D) = \sum_{m \geqslant (\alpha) \geqslant 0} c_\alpha D_\alpha, \quad \text{где} \quad D_\alpha = \prod_{j=1}^{k} D_{\alpha_j}, \quad D_0 = I,$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k), \quad \text{причем} \quad 1 \leqslant \alpha_j \leqslant n, \quad \text{и} \quad (\alpha) = k.$$

Определение 1. *Фундаментальным решением*, соответствующим оператору $P(D)$, называется обобщенная функция E в R^n, такая, что

$$P(D)E = \delta = T_\delta.$$

Важность понятия фундаментального решения заключается в том, что выражение

$$u = E * f, \quad \text{где} \quad f \in C_0^\infty(R^n),$$

удовлетворяет уравнению

$$P(D)u = f.$$

В самом деле, из правила дифференцирования (10), § 3, гл. VI следует, что $P(D)u = (P(D)E) * f = \delta * f = f$.

Пример. Пусть $P(D)$ — оператор Лапласа $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ в пространстве R^n при $n \geqslant 3$. Тогда обобщенная функция

$$E = T_g, \quad \text{где} \quad g(x) = \frac{1}{(2-n)S_n}|x|^{2-n}$$

(S_n — площадь поверхности единичной сферы в R^n), является фундаментальным решением для Δ.

Доказательство. Переходя к сферическим координатам ($dx = |x|^{n-1}d|x| \cdot dS_n$), мы видим, что функция $g(x)$ локально интегрируема в пространстве R^n. Следовательно,

$$\Delta T_{|x|^{2-n}}(\varphi) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} |x|^{2-n} \cdot \Delta\varphi \, dx, \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(R^n).$$

Выберем два положительных числа ε и $R > \varepsilon$ так, чтобы носитель $\operatorname{supp}(\varphi)$ содержался внутри шара $|x| \leqslant R$. Рассмотрим область

$G: \varepsilon \leqslant |x| \leqslant R$ пространства R^n и применим формулу Грина; мы получим

$$\int_G (|x|^{2-n} \cdot \Delta\varphi - \Delta |x|^{2-n}\varphi)\, dx = \int_S \left(|x|^{2-n} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \frac{\partial |x|^{2-n}}{\partial\nu} \cdot \varphi\right) dS,$$

где S — граница области G, состоящая из двух частей: $|x| = \varepsilon$ и $|x| = R$, а ν — внешняя нормаль к поверхности S. Поскольку на поверхности $|x| = R$ функция φ обращается в нуль, мы, учитывая, что $\Delta |x|^{2-n} = 0$ при $x \neq 0$ и что $-\frac{\partial}{\partial\nu} = \frac{\partial}{\partial |x|}$ в точках внутренней граничной поверхности $|x| = \varepsilon$, получаем

$$\int_{R^n} |x|^{2-n} \Delta\varphi\, dx = - \int_{|x|=\varepsilon} \varepsilon^{2-n} \frac{\partial\varphi}{\partial |x|} dS + \int_{|x|=\varepsilon} (2-n)\varepsilon^{1-n} \varphi\, dS.$$

При $\varepsilon \downarrow 0$ выражение $\partial\varphi/\partial |x| = \sum_{j=1}^{n} (x_j/|x|) \cdot \partial\varphi/\partial x_j$ ограничено, и площадь поверхности $|x| = \varepsilon$ равна $S_n \varepsilon^{n-1}$. Поэтому первое слагаемое в правой части стремится к нулю при $\varepsilon \downarrow 0$. Используя непрерывность функции φ, мы с помощью аналогичных рассуждений устанавливаем, что второй член справа стремится при $\varepsilon \downarrow 0$ к величине $(2-n) S_n \cdot \varphi(0)$. Это показывает, что T_g является фундаментальным решением для оператора Лапласа Δ.

Существование фундаментального решения для всякого линейного дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами доказали независимо Мальгранж [1] и Эренпрейс [1] в 1954—1955 гг. В приведенном ниже изложении этих результатов мы следуем Хёрмандеру [4].

Определение 2. Положим

$$\tilde{P}(\xi) = \Big(\sum_{|\alpha| \geqslant 0} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2\Big)^{1/2},$$

$$\text{где} \quad P^{(\alpha)}(\xi) = D_\xi^\alpha P(\xi), \qquad D_\xi^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}}{\partial\xi_1^{\alpha_1} \partial\xi_2^{\alpha_2} \ldots \partial\xi_n^{\alpha_n}}. \tag{1}$$

Мы будем говорить, что дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами $Q(D)$ *слабее*, чем $P(D)$, если

$$\tilde{Q}(\xi) \leqslant C\tilde{P}(\xi), \qquad \xi \in R^n, \tag{2}$$

где C — некоторая положительная постоянная.

Теорема 1. Если Ω — ограниченная область пространства R^n и $f \in L^2(\Omega)$, то в области Ω существует такое решение u уравнения $P(D)u = f$, что $Q(D)u \in L^2(\Omega)$ для всех операторов Q, которые слабее оператора P. Здесь подразумевается, что операторы $P(D)$ и $Q(D)$ применяются к функции u в обобщенном смысле.

Доказательство опирается на следующую теорему.

Теорема 2. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое фундаментальное решение E, соответствующее оператору $P(D)$, что

$$|(E * u)(0)| \leqslant C \sup_{|\eta| \leqslant \varepsilon} \int_{R^n} (|\hat{u}(\xi + i\eta)| / \tilde{P}(\xi))\, d\xi, \quad u \in C_0^\infty(R^n), \tag{3}$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от u, а $\hat{u}$ — преобразование Фурье — Лапласа функции u:

$$\hat{u}(\zeta) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} e^{-i\langle x, \zeta\rangle} u(x)\, dx, \qquad \zeta = \xi + i\eta.$$

Правая часть неравенства (3) при этом, согласно теореме Пэли — Винера (гл. VI, § 4), оказывается конечной.

Вывод теоремы 1 из теоремы 2. Заменим функцию u в формуле (3) выражением $Q(D)u * v$, где u и v принадлежат $C_0^\infty(R^n)$. Тогда из формулы (10) § 3 гл. VI получаем

$$|(Q(D)E * u * v)(0)| = |(E * Q(D)u * v)(0)| \leqslant CN(Q(D)u * v),$$

где

$$N(u) \equiv \sup_{|\eta| \leqslant \varepsilon} \int_{R^n} (|\hat{u}(\xi + i\eta)| / \tilde{P}(\xi)) \cdot d\xi.$$

Преобразование Фурье — Лапласа выражения $Q(D)u * v$, согласно формулам (17) § 2 гл. VI и (15) § 3 гл. VI, равно $(2\pi)^{n/2} Q(\zeta)\hat{u}(\zeta)\hat{v}(\zeta)$. Так как по формуле Тейлора

$$Q(\xi + i\eta) = \sum_\alpha \frac{1}{(\alpha)!}(-\eta)^\alpha D_\alpha Q(\xi), \quad \text{где } (-\eta)^\alpha = \prod_j (-\eta_{\alpha_j}), \tag{4}$$

условие (2) приводит к неравенству

$$|Q(\xi + i\eta)| / \tilde{P}(\xi) \leqslant C' \quad \text{при } |\eta| \leqslant \varepsilon \quad \text{и} \quad \xi \in R^n,$$

где постоянная C' может зависеть от ε. Следовательно,

$$N(Q(D)u * v) \leqslant (2\pi)^{n/2} C' \sup_{|\eta| \leqslant \varepsilon} \int_{R^n} |\hat{u}(\xi + i\eta)\hat{v}(\xi + i\eta)|\, d\xi.$$

Обозначая через $\| \; \|$ норму в пространстве $L^2(R^n)$ и используя теорему Парсеваля для преобразований Фурье, мы получаем

$$\int_{R^n} |\hat{u}(\xi + i\eta)|^2\, d\xi = \int_{R^n} |u(x)|^2 e^{2\langle x, \eta\rangle} dx \leqslant \|u(x) e^{\varepsilon|x|}\|^2 \quad \text{при } |\eta| \leqslant \varepsilon;$$

для функции $\hat{v}$ имеет место аналогичная оценка. Поэтому, в силу неравенства Шварца,

$$N(Q(D)u * v) \leqslant C'' \| u(x) e^{\varepsilon|x|} \| \cdot \| v(x) e^{\varepsilon|x|} \|$$

$$\text{для всех } u, v \in C_0^\infty(R^n),$$

где C'' — постоянная, которая может зависеть от ε.

В результате мы приходим к соотношению

$$\left| \int_{R^n} (Q(D)E * u)(x) v(-x)\,dx \right| \leqslant (CC'') \| ue^{\varepsilon|x|} \| \cdot \| ve^{\varepsilon|x|} \|$$

$$(u, v \in C_0^\infty(R^n)). \tag{5}$$

Условимся теперь через $L_\varepsilon^2(R^n)$ обозначать гильбертово пространство функций $w(x)$ с нормой

$$\left(\int_{R^n} |w(x)|^2 e^{\varepsilon|x|} dx \right)^{1/2} = \| w(x) e^{\varepsilon|x|} \|.$$

Множество $C_0^\infty(R^n)$ плотно в $L_\varepsilon^2(R^n)$, и, как легко показать, $L_{-\varepsilon}^2(R^n)$ представляет собой пространство, сопряженное к $L_\varepsilon^2(R^n)$, поэтому, разделив обе части неравенства (5) на $\| v(x) e^{\varepsilon|x|} \|$ и взяв верхнюю грань по всем функциям $v \in C_0^\infty(R^n)$, мы получаем неравенство

$$\| (Q(D)E * u)(x) e^{-\varepsilon|x|} \| \leqslant (CC'') \| u(x) e^{\varepsilon|x|} \|, \quad u \in C_0^\infty(R^n).$$

Это означает, что отображение

$$u \to Q(D)E * u \tag{6}$$

можно продолжить с $C_0^\infty(R^n)$ на $L_\varepsilon^2(R^n)$, так что это продолжение будет непрерывно и линейно отображать пространство $L_\varepsilon^2(R^n)$ в $L_{-\varepsilon}^2(R^n)$. Итак, для завершения доказательства теоремы 1 нам остается лишь положить $f_1 = f$ в области Ω, $f_1 = 0$ в области $R^n - \Omega$ и принять за решение u функцию $u = E * f_1$.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуются три леммы.

Лемма 1 (Мальгранж). Пусть $f(z)$ — функция, голоморфная в области $|z| \leqslant 1$ комплексной плоскости z, а $p(z)$ — полином, коэффициент которого при старшем члене равен A. Тогда

$$|Af(0)| \leqslant (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta}) p(e^{i\theta})|\,d\theta. \tag{7}$$

Доказательство. Обозначим через z_j нули полинома $p(z)$, лежащие внутри единичного круга $|z| < 1$, и запишем $p(z)$ в виде

$$p(z) = q(z) \prod_j \frac{z - z_j}{\bar{z}_j z_j - 1}.$$

Тогда функция $q(z)$ регулярна в единичном круге и $|p(z)| = |q(z)|$ при $|z| = 1$. Следовательно,

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})\, p(e^{i\theta})|\, d\theta = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})\, q(e^{i\theta})|\, d\theta \geqslant$$

$$\geqslant (2\pi)^{-1} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\, q(e^{i\theta})\, d\theta \right| = |f(0)\, q(0)|.$$

Лемма 1 следует из того, что величина $|q(0)/A|$ равна произведению абсолютных величин нулей функции $p(z)$, не лежащих внутри единичного круга.

Лемма 2. Пусть выполняются условия леммы 1 и, кроме того, степень многочлена $p(z)$ не превосходит m, тогда

$$|f(0)\, p^{(k)}(0)| \leqslant \frac{m!}{(m-k)!} (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})\, p(e^{i\theta})|\, d\theta. \tag{8}$$

Доказательство. Мы можем, не ограничивая общности, предположить, что степень многочлена $p(z)$ равна m и

$$p(z) = \prod_{j=1}^{m} (z - z_j).$$

Применяя предыдущую лемму к многочлену $\prod_{j=1}^{k} (z - z_j)$ и голоморфной функции $f(z) \cdot \prod_{j=k+1}^{m} (z - z_j)$, мы получим

$$\left| f(0) \prod_{j=k+1}^{m} z_j \right| \leqslant (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})\, p(e^{i\theta})|\, d\theta.$$

Такое же неравенство имеет место, если в левой части взять произведение любых $(m - k)$ чисел, выбранных из m чисел z_j. Производная $p^{(k)}(0)$ состоит из $m!/(m-k)!$ слагаемых такого типа, умноженных на $(-1)^{m-k}$, откуда и вытекает неравенство (8).

Лемма 3. Пусть функция $F(\zeta) = F(\zeta_1, \zeta_2, \ldots; \zeta_n)$ голоморфна в области $|\zeta| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\zeta_j|^2 \right)^{1/2} < \infty$ и степень полинома

$P(\zeta) = P(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ не превосходит m. Пусть $\Phi(\zeta) = \Phi(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ — неотрицательная интегрируемая функция с бикомпактным носителем, зависящая лишь от $|\zeta_1|, |\zeta_2|, \ldots, |\zeta_n|$. Тогда

$$|F(0) D_\alpha P(0)| \int\limits_{|\zeta| < \infty} |\zeta|^{(\alpha)} \Phi(\zeta)\, d\zeta \leqslant \frac{m!}{(m-(\alpha))!} \int\limits_{|\zeta| < \infty} |F(\zeta) P(\zeta)|\, \Phi(\zeta)\, d\zeta, \tag{9}$$

где $d\zeta$ — мера Лебега $d\xi_1\, d\eta_1 \ldots d\xi_n\, d\eta_n$ $(\zeta_k = \xi_k + i\eta_k)$.

Доказательство. Возьмем произвольную целую голоморфную функцию $f(z)$ и применим неравенство (8) к функциям $f(rz)$ и $p(rz)$, где $r > 0$. Это приводит к неравенствам вида

$$|f(0)\, p^{(k)}(0)| \cdot r^k \leqslant \frac{m!}{(m-k)!} (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})\, p(re^{i\theta})|\, d\theta.$$

Пусть $\psi(r)$ — произвольная неотрицательная интегрируемая функция с бикомпактным носителем. Умножая обе части последнего неравенства на $2\pi r \psi(r)$ и интегрируя по r, мы получаем новое неравенство

$$|f(0)\, p^{(k)}(0)| \int |t|^k\, \psi(|t|)\, dt \leqslant \frac{m!}{(m-k)!} \int |f(t)\, p(t)|\, \psi(|t|)\, dt, \tag{10}$$

где $dt = r\, dr\, d\theta$ и интегрирование распространяется на всю комплексную t-плоскость. Теперь можно легко доказать лемму 3, применяя неравенство (10) последовательно к каждой из переменных $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$.

Доказательство теоремы 2. Положим $P(D)u = v$, где $u \in C_0^\infty(R^n)$. Тогда $P(\zeta)\hat{u}(\zeta) = \hat{v}(\zeta)$. Применим лемму 3, взяв $F(\zeta) = \hat{u}(\xi + \zeta)$, многочлен $P(\xi + \zeta)$ (вместо $P(\zeta)$) и положив $|\Phi(\zeta)| = 1$ при $|\zeta| \leqslant \varepsilon$ и $\Phi(\zeta) = 0$ при $|\zeta| > \varepsilon$. Так как $\tilde{P}(\xi) \leqslant \sum\limits_{\alpha} |D^\alpha P(\xi)|$, мы выводим из (9) неравенство

$$|\hat{u}(\xi)\tilde{P}(\xi)| \leqslant C_1 \int\limits_{|\zeta| \leqslant \varepsilon} |\hat{u}(\xi+\zeta) P(\xi+\zeta)|\, d\zeta = C_1 \int\limits_{|\zeta| \leqslant \varepsilon} |\hat{v}(\xi+\zeta)|\, d\zeta.$$

Используя формулу обращения Фурье, мы получаем отсюда неравенство

$$|u(0)| \leqslant (2\pi)^{-n/2} \int |\hat{u}(\xi)|\, d\xi \leqslant C_1' \int\limits_{|\zeta| \leqslant \varepsilon} \left[\int |(\hat{v}(\xi+\zeta)|/\tilde{P}(\xi))\, d\xi \right] d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant C_1' \int \left[\int\limits_{\xi'^2 + \eta'^2 \leqslant \varepsilon^2} (|\hat{v}(\xi + \xi' + i\eta')|/\tilde{P}(\xi))\, d\xi'\, d\eta' \right] d\xi.$$

С другой стороны,

$$\tilde{P}(\xi + \xi')/\tilde{P}(\xi) \leqslant C_2 \quad \text{при} \quad |\xi'| \leqslant \varepsilon,$$

так как
$$D^\alpha P(\xi+\xi') = \sum_\beta \frac{(\xi')^\beta}{(\beta)!} D^{\alpha+\beta} P(\xi),$$

поэтому величина $|D^\alpha P(\xi+\xi')|/\tilde{P}(\xi)$ ограничена, когда $|\xi'| \leqslant \varepsilon$. Значит,

$$|u(0)| \leqslant C_1' C_2 \int \left[\int\limits_{\xi'^2+\eta'^2 \leqslant \varepsilon^2} (|\hat{v}(\xi+\xi'+i\eta')|/\tilde{P}(\xi+\xi'))\, d\xi'\, d\eta' \right] d\xi \leqslant$$
$$\leqslant C_3 \|v\|', \tag{11}$$

где
$$\|v\|' = \int\limits_{|\eta| \leqslant \varepsilon} \left[\int (|\hat{v}(\xi+i\eta)|/\tilde{P}(\xi))\, d\xi \right] d\eta \qquad (u \in C_0^\infty(R^n))$$

и C_3 — постоянная, зависящая только от ε.

Заметим кстати, что из теоремы Пэли — Винера гл. VI, § 4, вытекает, что функция $\|v\|'$ ограничена. Рассмотрим теперь пространство $\tilde{C}_0^\infty(R^n)$ — пополнение пространства $C_0^\infty(R^n)$ по отношению к норме $\|v\|'$. Тогда по теореме Хана — Банаха о продолжении линейный функционал $L: v = P(D)u \to u(0)$ (где $u \in C_0^\infty(R^n)$) может быть продолжен до некоторого непрерывного линейного функционала, заданного на пространстве $\tilde{C}_0^\infty(R^n)$. Как и в случае пространства $L^1(R^n)$, мы заключаем, что существует ограниченная почти всюду по мере $(\tilde{P}(\xi))^{-1}\, d\xi\, d\eta$ бэровская функция $k(\xi+i\eta)$, такая, что продолжение линейного функционала L представляется в виде

$$L(v) = \int\limits_{|\eta| \leqslant \varepsilon} \left[\int (\hat{v}(\xi+i\eta)\, k(\xi+i\eta)/\tilde{P}(\xi))\, d\xi \right] d\eta. \tag{12}$$

Когда последовательность функций $v_h(x) \in C_0^\infty(R^n)$ стремится к нулю при $h \to \infty$ в топологии пространства $\mathfrak{D}(R^n)$, последовательность $v_h(x)\, e^{i\langle x, \eta\rangle}$ тоже стремится к нулю в топологии $\mathfrak{D}(R^n)$ равномерно относительно η при $|\eta| \leqslant \varepsilon$. Поэтому, как и в § 1 гл. VI, нетрудно показать, что при $|\eta| \leqslant \varepsilon$ выражение $\hat{v}_h(\xi+i\eta)$ как функция переменной ξ стремится к нулю в топологии пространства $\mathfrak{S}(R^n)$ равномерно относительно η. Поэтому в силу (12) функционал L определяет обобщенную функцию $T \in \mathfrak{D}(R^n)'$. Таким образом, по формуле (5) из § 3 гл. VI
$$L(v) = (T * \check{v})(0) = (\check{T} * v)(0). \tag{13}$$

Полагая $E = \check{T}$, мы получаем доказательство теоремы 2; при этом неравенство (3) следует из (11).