## 11. Дифференциальные операторы с переменными коэффициентами

Теорема существования, доказанная в предыдущем параграфе, может быть распространена и на некоторые линейные дифференциальные операторы вида

$$P(x, D) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) D_{\alpha}, \tag{1}$$

где коэффициенты $a_{\alpha}(x)$ непрерывны в ограниченной открытой области $\Omega$ пространства $R^n$.

Допустим, что оператор $P(x, D)$ удовлетворяет в области $\Omega$ условию

$$\sup_{x, y \in \Omega, \xi \in R^n} \tilde{P}(x, \xi)/\tilde{P}(y, \xi) < \infty, \tag{2}$$

где $\tilde{P}(x, \xi) = \left(\sum_{\alpha} |P^{(\alpha)}(x, \xi)|^2\right)^{1/2}$, а $x$ рассматривается как параметр.

**Примеры.** Дифференциальный оператор $P(x, D) = \sum_{|s|, |t| \leqslant m} D^s a_{s,t}(x) D^t$ с вещественными ограниченными принадлежащими $C^{\infty}$ коэффициентами $a_{s,t}(x) = a_{t,s}(x)$, заданными в области $\Omega$, называется *сильно эллиптическим* в $\Omega$ (см. гл. VI, § 9), если существует такая положительная постоянная $\delta$, что

$$\sum_{|s|, |t| = m} \xi^s a_{s,t}(x) \xi^t \geqslant \delta \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2\right)^m \quad \text{в области } \Omega. \tag{3}$$

В этом случае, как нетрудно видеть, оператор $P(x, D)$ удовлетворяет условию (2). Допустим теперь, что оператор $P(x, D)$ сильно эллиптичен в открытой области $\Omega$ пространства $R^{n-1}$. Тогда оператор

$$\frac{\partial}{\partial x_n} - P(x, D), \tag{4}$$

рассматриваемый в топологическом произведении $\Omega \times \{x_n;\ 0 < x_n\}$, называется *параболическим оператором*. Нетрудно проверить, что оператор (4) удовлетворяет условию (2) в области $\Omega \times \{x_n;\ 0 < x_n\}$.

**Теорема** (Хёрмандер [5]). Допустим, что $P(x, D)$ удовлетворяет условию (2) в ограниченной открытой области $\Omega$ пространства $R^n$. Тогда для любой точки $x^0 \in \Omega$ существует открытая подобласть $\Omega_1$ области $\Omega$, такая, что $x^0 \in \Omega_1$ и уравнение $P(x, D) u = f$ при всякой функции $f \in L^2(\Omega_1)$ имеет обобщенное решение $u \in L^2(\Omega_1)$, для которого $Q(D) u \in L^2(\Omega_1)$, где $Q(D)$ — любой оператор, который слабее, чем $P(x, D)$, в каждой фиксированной точке $x \in \Omega_1$.

**Доказательство.** Введем обозначение $P(x^0, D) = P_0(D)$. Совокупность всех дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, которые слабее $P_0(D)$, образует конечномерное линейное пространство, ибо степени многочленов $Q(\xi)$ для таких операторов $Q(D)$ не могут превосходить степени многочлена, соответствующего оператору $P_0(D)$. Поэтому существуют операторы $P_1(D)$, $P_2(D)$, ... ..., $P_N(D)$, образующие базис этого пространства. Следовательно,

$$P(x, D) = P_0(D) + \sum_{j=1}^{N} b_j(x) P_j(D), \qquad b_j(x^0) = 0, \tag{5}$$

где коэффициенты $b_j(x)$ непрерывны в области $\Omega$ и определены единственным образом.

Как было установлено в предыдущем параграфе, существует ограниченный линейный оператор $T$, действующий из $L^2(\Omega_1)$ в $L^2(\Omega_1)$, такой, что

$$P_0(D)Tf = f \text{ для всех } f \in L^2(\Omega_1), \tag{6}$$

и все операторы $P_j(D)T$ ограничены как операторы, отображающие пространство $L^2(\Omega_1)$ в себя. Здесь $\Omega_1$ может быть любой открытой подобластью области $\Omega$. При этом мы должны принять за $Tf$ сужение $E * f_1$ на область $\Omega_1$, где $f_1 = f$ в $\Omega_1$ и $f_1 = 0$ в $R^n - \Omega_1$.

Уравнение $P(x, D)u = f$ эквивалентно уравнению

$$P_0(D)u + \sum_{j=1}^{N} b_j(x) P_j(D)u = f. \tag{7}$$

Мы будем искать его решение в виде $u = Tv$. Подставляя это выражение в (7) и используя (6), получаем

$$v + \sum_{j=1}^{N} b_j(x) P_j(D) Tv = f. \tag{8}$$

Обозначим сумму норм ограниченных линейных операторов $P_j(D)T$, отображающих пространство $L^2(\Omega_1)$ в себя, через $C$. Поскольку функции $b_j(x)$ непрерывны и $b_j(x^0) = 0$, мы можем выбрать область $\Omega_1 \ni x^0$ столь малой, что

$$C\,|b_j(x)| < \frac{1}{N} \text{ для всех } x \in \Omega_1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, N).$$

Можно также считать, что написанное выше неравенство выполняется для всех точек $x$, принадлежащих бикомпактному замыканию области $\Omega_1$. Тогда норма оператора $\sum_{j=1}^{N} b_j(x) P_j(D) T$ меньше 1, и поэтому уравнение (8) можно решить с помощью ряда Неймана (теорема 2, гл. II, § 1)

$$v = \left(I + \sum_{j=1}^{N} b_j P_j(D) T\right)^{-1} f = Af,$$

где $A$ — ограниченный линейный оператор, отображающий пространство $L^2(\Omega_1)$ в себя. Следовательно, функция $u = TAf$ и будет искомым решением уравнения $P(x, D)u = f$.

## § 12. Гипоэллиптические операторы. Теорема Хёрмандера

В гл. II, § 7, мы определили понятие гипоэллиптичности оператора и доказали теорему Хёрмандера, утверждающую, что если оператор $P(D)$ — гипоэллиптический, то для любой сколь угодно большой положительной постоянной $C_1$ найдется такая положительная постоянная $C_2$, что все решения $\zeta = \xi + i\eta$ алгебраического уравнения $P(\zeta) = 0$ обладают таким свойством:

$$\text{из неравенства } |\eta| < C_1 \text{ вытекает неравенство } |\xi| < C_2. \qquad (1)$$

Для доказательства обратного предложения, а именно что из условия (1) следует гипоэллиптичность оператора $P(D)$, нам потребуется следующая лемма.

**Лемма** (Хёрмандер [1]). Если выполнено условие (1), то

$$\sum_{|\alpha|>0} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 / \sum_{|\alpha|\geqslant 0} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 \to 0 \text{ при } |\xi| \to \infty,\ \xi \in R^n. \qquad (2)$$

**Доказательство.** Сначала мы покажем, что для всякого вещественного вектора $\Theta \in R^n$

$$P(\xi + \Theta)/P(\xi) \to 1 \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty,\ \xi \in R^n. \qquad (3)$$

Без ограничения общности можно допустить, что система координат в пространстве $R^n$ выбрана так, что $\Theta = (1, 0, 0, \ldots, 0)$. Тогда по условию (1)

$$P(\xi + i\eta) \neq 0 \quad \text{при} \quad |\eta| < C_1 \text{ и } |\xi| > C_2.$$

Следовательно, если $|\xi| \geqslant C_1 + C_2$ и $P(\zeta') = 0$, то $|\xi - \zeta'| \geqslant C_1$. Действительно, полагая $\zeta' = \xi' + i\eta'$, мы находим, что выполняется по крайней мере одно из двух неравенств $|\eta'| \geqslant C_1$ или $|\xi'| < C_2$, так что $|\xi - \xi'| \geqslant C_1$. Возьмем теперь произвольные фиксированные значения переменных $\xi_2, \ldots, \xi_n$ и обозначим через $t_k$ такие числа, что векторы $(t_k, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ представляют собой нули многочлена $P$. Тогда

$$P(\xi) = C \prod_{k=1}^{m} (\xi_1 - t_k), \quad C \neq 0.$$

Поэтому если $|\xi| \geqslant C_1 + C_2$, то $|t_k - \xi_1| \geqslant C_1$ и, следовательно, выражение

$$\frac{P(\xi + \Theta)}{P(\xi)} = \prod_{k=1}^{m} \frac{\xi_1 + 1 - t_k}{\xi_1 - t_k} = \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{1}{\xi_1 - t_k}\right)$$