где A — ограниченный линейный оператор, отображающий пространство $L^2(\Omega_1)$ в себя. Следовательно, функция $u = TAf$ и будет искомым решением уравнения $P(x, D)u = f$.

§ 12. Гипоэллиптические операторы. Теорема Хёрмандера

В гл. II, § 7, мы определили понятие гипоэллиптичности оператора и доказали теорему Хёрмандера, утверждающую, что если оператор $P(D)$ — гипоэллиптический, то для любой сколь угодно большой положительной постоянной C_1 найдется такая положительная постоянная C_2, что все решения $\zeta = \xi + i\eta$ алгебраического уравнения $P(\zeta) = 0$ обладают таким свойством:

$$\text{из неравенства } |\eta| < C_1 \text{ вытекает неравенство } |\xi| < C_2. \tag{1}$$

Для доказательства обратного предложения, а именно что из условия (1) следует гипоэллиптичность оператора $P(D)$, нам потребуется следующая лемма.

Лемма (Хёрмандер [1]). Если выполнено условие (1), то

$$\sum_{|\alpha|>0} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 \Big/ \sum_{|\alpha|\geqslant 0} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 \to 0 \text{ при } |\xi| \to \infty,\ \xi \in R^n. \tag{2}$$

Доказательство. Сначала мы покажем, что для всякого вещественного вектора $\Theta \in R^n$

$$P(\xi + \Theta)/P(\xi) \to 1 \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty,\ \xi \in R^n. \tag{3}$$

Без ограничения общности можно допустить, что система координат в пространстве R^n выбрана так, что $\Theta = (1, 0, 0, \ldots, 0)$. Тогда по условию (1)

$$P(\xi + i\eta) \neq 0 \quad \text{при} \quad |\eta| < C_1 \text{ и } |\xi| > C_2.$$

Следовательно, если $|\xi| \geqslant C_1 + C_2$ и $P(\zeta') = 0$, то $|\xi - \zeta'| \geqslant C_1$. Действительно, полагая $\zeta' = \xi' + i\eta'$, мы находим, что выполняется по крайней мере одно из двух неравенств $|\eta'| \geqslant C_1$ или $|\xi'| < C_2$, так что $|\xi - \xi'| \geqslant C_1$. Возьмем теперь произвольные фиксированные значения переменных $\xi_2, \ldots, \xi_n$ и обозначим через t_k такие числа, что векторы $(t_k, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ представляют собой нули многочлена P. Тогда

$$P(\xi) = C \prod_{k=1}^{m} (\xi_1 - t_k), \quad C \neq 0.$$

Поэтому если $|\xi| \geqslant C_1 + C_2$, то $|t_k - \xi_1| \geqslant C_1$ и, следовательно, выражение

$$\frac{P(\xi + \Theta)}{P(\xi)} = \prod_{k=1}^{m} \frac{\xi_1 + 1 - t_k}{\xi_1 - t_k} = \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{1}{\xi_1 - t_k}\right)$$

удовлетворяет неравенству

$$\left|\frac{P(\xi+\theta)}{P(\xi)}-1\right| \leqslant mC_1^{-1}\left(1+C_1^{-1}\right)^{m-1} \quad \text{при } |\xi| \geqslant C_1+C_2.$$

При достаточно больших значениях C_2 мы можем взять сколь угодно большие значения C_1, откуда и вытекает (3).

По формуле Тейлора

$$P(\xi+\eta)=\sum_{(\alpha)} \frac{1}{(\alpha)!} P^{(\alpha)}(\xi)\eta^{\alpha}, \quad P^{(\alpha)}(\xi)=(i)^{(\alpha)}D_{\alpha}P(\xi), \quad D_{\alpha}=\prod_{j=1}^{(\alpha)} D_{\alpha_j},$$

и поэтому

$$\sum_{i=1}^{k} t_i P(\xi+\eta^{(i)})=\sum_{(\alpha)} \frac{1}{(\alpha)!} P^{(\alpha)}(\xi) \sum_{i=1}^{k} t_i (\eta^{(i)})^{\alpha}, \tag{4}$$

где $\eta^{(i)}$ — произвольные вещественные векторы и t_i — любые комплексные числа. Величины k, t_i и $\eta^{(i)}$ можно подобрать так, чтобы коэффициенты $\sum_{i=1}^{k} t_i (\eta^{(i)})^{\alpha}$ $((\alpha) \leqslant m)$ принимали любые заданные значения и зависели от α симметрично. В самом деле, в противном случае должны были бы существовать постоянные C_{α} $((\alpha) \leqslant m)$, симметричные как функции α и не все равные нулю, такие, что $\sum_{(\alpha)} C_{\alpha}\eta^{\alpha}=0$ при любых η, что невозможно. Итак,

$$P^{(\alpha)}(\xi)=\sum_{i=1}^{k} t_i P(\xi+\eta^{(i)}) \quad \text{при вещественных значениях } \eta^{(i)}.$$

Но при $(\alpha) \neq 0$ главные члены в правой части должны уничтожиться, и поэтому $\sum_{i=1}^{k} t_i=0$. Отсюда, учитывая (3), мы получаем условие (2).

Следствие. Допустим, что полиномы $P_1(\xi)$ и $P_2(\xi)$ удовлетворяют условию (2). Тогда многочлен $P(\xi)=P_1(\xi)P_2(\xi)$ тоже удовлетворяет (2). Если, кроме того, операторы $Q_j(D)$ слабее, чем $P_j(D)$ $(j=1, 2)$, то оператор $Q_1(D)Q_2(D)$ слабее, чем $P(D)$.

Доказательство. Применяя формулу Лейбница дифференцирования произведения функций, мы видим, что $P^{(\alpha)}(\xi)$ представляет собой линейную комбинацию произведений производных многочленов $P_1(\xi)$ и $P_2(\xi)$ порядков, в сумме не превосходящих (α). Следовательно, условие (2) выполняется и для многочлена $P(\xi)$. Второе утверждение этого следствия доказывается аналогичным образом.

Теперь мы можем доказать теорему Хёрмандера.

Теорема (Хёрмандер [1]). Для того чтобы оператор $P(D)$ был гипоэллиптическим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2).

Доказательство. Необходимость следует из результатов гл. II, § 7 и только что доказанной леммы. Перейдем к доказательству достаточности.

Обозначим через Ω произвольную открытую подобласть пространства R^n. Мы будем говорить, что обобщенная функция $u \in \mathfrak{D}(\Omega)'$ принадлежит классу $H^k_{\text{loc}}(\Omega)$, если при любой функции $\varphi_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ преобразование Фурье $\widehat{u_0}$ функции $u_0 = \varphi_0 u$ удовлетворяет (см. гл. VI, § 2) условию

$$\int\limits_{R^n} (1+|\xi|^2)^k |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi < \infty, \quad \text{т. е.} \quad u_0 = \varphi_0 u \in W^{k,2}(R^n). \tag{5}$$

По лемме Соболева (гл. VI, § 7) достаточность условия этой теоремы следует из такого утверждения:

если полином $P(\xi)$ удовлетворяет условию (2) и обобщенная функция $u \in \mathfrak{D}(\Omega)'$ такова, что $P(D)u \in H^s_{\text{loc}}(\Omega)$, где s — некоторое положительное число, то функция u принадлежит $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$. (6)

В самом деле, если утверждение (6) справедливо и $P(D)u \in C^\infty$ в области Ω, то $P(D)u \in H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ при любом положительном s — это вытекает из формулы Лейбница дифференцирования произведения функций.

Доказательство утверждения (6) опирается на две леммы.

Лемма 1. Если $f \in W^{k,2}(R^n)$ и $\psi \in C_0^\infty(R^n)$ $\left(k \gtreqless 0\right)$, то $\psi f \in W^{k,2}(R^n)$.

Лемма 2. Пусть многочлен $P(\xi)$ удовлетворяет условию (2). Тогда можно указать такую положительную постоянную μ, что $|P^{(\alpha)}(\xi)\xi^\mu|/|P(\xi)| \to 0$ при $|\xi| \to \infty$ $(\xi \in R^n)$ для любого $\alpha \neq 0$.

Доказательство леммы 1 будет дано ниже, а лемму 2 мы здесь доказывать не будем (читатель может обратиться к книгам Хёрмандера [6] и Фридмана [1]).

Закончим теперь доказательство теоремы. Выберем из Ω две произвольные открытые подобласти Ω_1 и Ω_0, такие, что их замыкания Ω_1^a и Ω_0^a бикомпактны и $\Omega_1^a \subsetneqq \Omega_0$, $\Omega_0^a \subseteq \Omega$. По теореме Шварца (гл. III, § 11) всякая обобщенная функция $u \in \mathfrak{D}(\Omega)'$, если ее рассматривать как обобщенную функцию, принадлежащую пространству $\mathfrak{D}(\Omega_0)'$, представляет собой обобщенную производную вида $D^t v$ некоторой функции $v \in L^2(\Omega_0)$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_0)$ — такая функция, что $\varphi(x) = 1$ в области Ω_1. Тогда $u = u_0 = D^t\varphi v$ как обобщенная функция принадлежит $\mathfrak{D}(\Omega_1)'$. Поскольку $\varphi v \in L^2(R^n)$, существует такое целое k, возможно отрицательное, что

$$P^{(\alpha)}(D)\,u_0 = P^{(\alpha)}(D)\,D^t\varphi v \in W^{k,\,2}(R^n) \quad \text{для всех} \quad \alpha. \tag{7}$$

Применяя лемму 1 и обобщенную формулу Лейбница (см. гл. I, § 8), мы получаем

$$P(D)\,\varphi_1 u_0 = \varphi_1 P(D)\,u_0 + \sum_{(\alpha)>0} \frac{1}{(\alpha)!} D_\alpha\varphi_1 \cdot P^{(\alpha)}(D)\,u_0. \tag{8}$$

Отсюда, так как $P(D)\,u_0 \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, мы заключаем, что для любой функции $\varphi_1 \in C_0^\infty(\Omega_1)$

$$P(D)\,\varphi_1 u_0 \in W^{k_1,\,2}(R^n), \quad \text{где} \quad k_1 = \min(s,\ k). \tag{9}$$

Следовательно, преобразование Фурье $\hat{u}_1(\xi)$ функции $u_1(x) = \varphi_1(x)\,u_0(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_{R^n} |P(\xi)\,\hat{u}_1(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^{k_1}\,d\xi < \infty, \tag{10}$$

откуда по лемме 2

$$\int_{R^n} |P^{(\alpha)}(\xi)\,\hat{u}_1(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^{k_1+\mu}\,d\xi < \infty,$$

$$\text{т. е.} \quad P^{(\alpha)}(D)\,u_1 \in W^{k_1+\mu,\,2}(R^n) \quad \text{при всех} \quad \alpha \neq 0. \tag{11}$$

Пусть Ω_2 — открытая подобласть области Ω_1, такая, что замыкание Ω_2^a бикомпактно и содержится в Ω_1. Тогда для всякой функции $\varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega_2)$ мы можем с помощью (8) и (11) доказать, что

$$P(D)\,\varphi_2 u_1 \in W^{k_2,\,2}(R^n) \quad \text{при} \quad k_2 = \min(s,\ k_1 + \mu),$$

и поэтому

$$P^{(\alpha)}(D)\,\varphi_2 u_1 \in W^{k_2+\mu,\,2}(R^n) \quad \text{при всех} \quad \alpha \neq 0.$$

Повторяя приведенные рассуждения конечное число раз, мы приходим к выводу, что для всякой открытой подобласти Ω' из Ω, замыкание которой бикомпактно и содержится в Ω, справедливо включение

$$P^{(\alpha)}(D)\,\varphi u \in W^{s,\,2}(R^n) \quad \text{для любых} \quad \alpha \neq 0 \ \text{и} \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega').$$

Если теперь выбрать такое α, чтобы $P^{(\alpha)}(\xi) = \text{constant} \neq 0$, то $\varphi u \in W^{s,\,2}(R^n)$, что и требовалось доказать.

Доказательство леммы 1. Преобразование Фурье функции ψf имеет вид (теорема 6, гл. VI, § 3)

$$(2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \hat{\psi}(\eta)\,\hat{f}(\xi - \eta)\,d\eta;$$

таким образом, мы должны доказать, что

$$\int_{R^n} (1+|\eta|^2)^s \left| \int_{R^n} \hat{\psi}(\eta) \hat{f}(\xi-\eta) d\eta \right|^2 d\xi < \infty$$

при любом значении $s > 0$. Используя полученные ранее соотношения и неравенство Шварца, мы можем мажорировать этот интеграл выражением

$$\int_{R^n} (1+|\xi|^2)^s \left[\int_{R^n} |\hat{\psi}(\eta)| d\eta \cdot \int_{R^n} |\hat{\psi}(\eta)| \cdot |\hat{f}(\xi-\eta)|^2 d\eta \right] d\xi =$$

$$= \int_{R^n} |\hat{\psi}(\eta)| d\eta \left[\int_{R^n} \int_{R^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{\psi}(\eta)| \cdot |\hat{f}(\xi-\eta)|^2 d\xi\, d\eta \right]. \quad (12)$$

Так как

$$\frac{1+|\xi|^2}{1+|\xi-\eta|^2} \leqslant 4(1+|\eta|^2), \quad 4(1+|\xi|^2) \geqslant \frac{1+|\xi-\eta|^2}{1+|\eta|^2},$$

то

$$(1+|\xi|^2)^s \leqslant 4^{|s|}(1+|\eta|^2)^{|s|}(1+|\xi-\eta|^2)^s. \quad (13)$$

С помощью (13) правая часть (12) оценивается сверху: она не превосходит величины $\int_{R^n} |\hat{\psi}(\eta)| d\eta$, умноженной на

$$4^{|s|} \int_{R^n} |\hat{\psi}(\eta)| (1+|\eta|^2)^{|s|} d\eta \cdot \left(\int_{R^n} (1+|\xi-\eta|^2)^s |\hat{f}(\xi-\eta)|^2 d\xi \right).$$

Этот последний интеграл сходится, так как $f \in W^{s,2}(R^n)$ и $\hat{\psi}(\eta) \in \mathfrak{S}(R^n)$. Лемма 1, таким образом, доказана, и это завершает доказательство теоремы.

Замечания о некоторых дальнейших исследованиях

1. Линейный дифференциальный оператор $P(x, D)$, коэффициенты которого принадлежат $C^\infty(\Omega)$, называется ***формально гипоэллиптическим*** в $\Omega \subseteq R^n$, если он удовлетворяет следующим двум условиям: (1) оператор $P(x^0, D)$ гипоэллиптический при каждом фиксированном $x^0 \in \Omega$; (2) $P(x^0, \xi) = O(P(x', \xi))$ при $|\xi| \to \infty$ $(\xi \in R^n)$ для любых фиксированных x^0, $x' \in \Omega$. Хёрмандер [5] и Мальгранж [2] доказали, что для таких операторов всякое обобщенное решение $u \in \mathfrak{D}(\Omega)'$ уравнения $P(x, D)u = f$ будет принадлежать C^∞ после поправки на множестве меры нуль, лежащем в открытом подмножестве множества Ω, где $f \in C^\infty$. Доказательство, приведенное выше для операторов с постоянными коэффициентами, можно

изменить так, что оно будет применимо к операторам такого типа; см., например, Петре [1].

2. И. Г. Петровский [1] показал, что все обобщенные решения $u \in \mathfrak{D}(R^n)'$ уравнения $P(D)u=0$ являются аналитическими функциями в пространстве R^n тогда и только тогда, когда однородная часть $P_m(\xi)$ многочлена $P(\xi)$, состоящая из членов высшей степени m, не обращается в нуль при $\xi \in R^n$. Если это условие выполняется, говорят, что оператор $P(D)$ является (*аналитически*) *эллиптическим*. Показано также, что в этом случае показатель m должен быть четным, а оператор $P(D)$ — гипоэллиптическим. Отметим, что гипоэллиптичность таких операторов $P(D)$ может быть также установлена с помощью теоремы Фридрихса (гл. VI, § 9). В самом деле, если $P_m(\xi)$ не обращается в нуль, то с помощью преобразования Фурье легко убедиться в том, что один из операторов $P(D)$ или $-P(D)$ сильно эллиптичен. Доказательство теоремы Петровского см., например, в работах Хёрмандера [6], Трева [1], Морри — Ниренберга [1].