ГЛАВА VII

Сопряженные операторы

1. Сопряженные операторы в локально выпуклых линейных топологических пространствах

Обобщение понятия *транспонированной матрицы* приводит к понятию *сопряженного оператора.*

Теорема 1. Пусть X, Y — локально выпуклые линейные топологические пространства, и пусть X'_s, Y'_s — их сильные сопряженные. Пусть T — линейный оператор, действующий из области $D(T) \subseteq X$ в Y. Рассмотрим точки $\{x', y'\}$ произведения $X'_s \times Y'_s$, удовлетворяющие условию

$$\langle Tx, y' \rangle = \langle x, x' \rangle \quad \text{для всех} \quad x \in D(T). \tag{1}$$

Элементы x' однозначно определяются элементами y' тогда и только тогда, когда область $D(T)$ плотна в пространстве X.

Доказательство. В силу линейности задачи мы должны рассмотреть следующее условие:

$$\text{если } \langle x, x' \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in D(T), \text{ то } x' = 0.$$

Таким образом, достаточность вытекает из непрерывности линейного функционала x'. Допустим, что $D(T)^a \neq X$. Тогда по теореме Хана — Банаха найдется такой элемент $x'_0 \neq 0$, что $\langle x, x'_0 \rangle = 0$ для всех $x \in D(T)$, а это неверно. Полученное противоречие доказывает необходимость приведенного условия.

Определение 1. Из доказанной теоремы следует, что соотношение (1) определяет некоторый линейный оператор $T' : T'y' = x'$ тогда и только тогда, когда $D(T)^a = X$. Оператор T' в этом случае называется *сопряженным* к T. Его область определения $D(T')$ представляет собой совокупность всех $y' \in Y'_s$, для которых существуют элементы $x' \in X'_s$, удовлетворяющие условию (1) и $T'y' = x'$. Таким образом, T' — линейный оператор, действующий из области $D(T') \subseteq Y'_s$ в пространство X'_s, такой, что

$$\langle Tx, y' \rangle = \langle x, T'y' \rangle \quad \text{для всех} \quad x \in D(T) \quad \text{и} \quad y' \in D(T'). \tag{2}$$

Теорема 2. Если $D(T) = X$ и оператор T непрерывен, то оператор T' линейно и непрерывно отображает пространство Y'_s в X'_s.

Доказательство. Выражение $\langle Tx, y' \rangle$ при любом $y' \in Y'_s$ представляет собой непрерывный линейный функционал, заданный для

$x \in X$, поэтому найдется такой элемент $x' \in X'_s$, что $T'y' = x'$. Пусть B — некоторое ограниченное множество в X. Тогда, поскольку оператор T непрерывен, образ $T \cdot B = \{Tx;\ x \in B\}$ представляет собой ограниченное множество в Y. Поэтому, в силу определяющего соотношения $\langle Tx,\ y' \rangle = \langle x,\ x' \rangle$, если элемент y' стремится к нулю в топологии ограниченной сходимости пространства Y' (см. гл. IV, § 7), то соответствующий элемент x' тоже стремится к $0 \in X'$ в топологии ограниченной сходимости пространства X'. Это означает, что линейный оператор T', действующий из Y'_s в X'_s, непрерывен.

Пример 1. Пусть $X = Y$ есть n-мерное евклидово пространство с (l^2)-нормой. Для произвольного непрерывного линейного оператора $T \in L(X,\ X)$ положим

$$Tx = y, \quad \text{где} \quad x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \quad \text{и} \quad y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n).$$

Тогда $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} t_{ij} x_j$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, и поэтому для элементов $z = (z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n) \in X'$

$$\langle Tx,\ z \rangle = \langle y,\ z \rangle = \sum_j y_j z_j = \sum_i \Big(\sum_j t_{ij} x_j\Big) z_i = \sum_j x_j \Big(\sum_i t_{ij} z_i\Big).$$

Таким образом, $T'z = w$, где $w_j = \sum\limits_{i=1}^{n} t_{ij} z_i$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Это показывает, что матрицей оператора T' служит *транспонированная матрица* оператора T.

Пример 2. Пусть $X = Y$ — вещественное гильбертово пространство (l^2). Определим операторы $T_n \in L(X,\ X)$:

$$T_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots) = (x_n,\ x_{n+1},\ x_{n+2},\ \ldots).$$

Тогда из равенства

$$\langle T_n(x_1,\ x_2,\ \ldots),\ (z_1,\ z_2,\ \ldots) \rangle = x_n z_1 + x_{n+1} z_2 + x_{n+2} z_3 + \ldots$$

мы находим, что

$$T'_n(z_1,\ z_2,\ \ldots) = (\overbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}^{n-1},\ z_1,\ z_2,\ \ldots).$$

Таким образом, $\| T_n(x_1,\ x_2,\ \ldots) \| = \Big(\sum\limits_{m=n}^{\infty} x_m^2\Big)^{1/2} \to 0$ при $n \to \infty$ и $\| T'_n(z_1,\ z_2,\ \ldots) \| = \| (z_1,\ z_2,\ \ldots) \|$. Отсюда вытекает

Предложение 1. Отображение $T \to T'$ пространства $L(X,\ Y)$ в пространство $L(Y'_s,\ X'_s)$ в общем случае может и не быть непрерывным в топологии простой сходимости пространства операторов, т. е. из условия $\lim\limits_{n \to \infty} T_n x = Tx$ для всех $x \in X$ может и не следовать, что $\lim\limits_{n\to\infty} T'_n y' = T'y'$ для всех $y' \in Y'$ в топологии сильного сопряженного пространства X'_s.

Теорема 2'. Пусть T — ограниченный линейный оператор, отображающий нормированное линейное пространство X в нормированное линейное пространство Y. Тогда сопряженный оператор T' представляет собой ограниченный линейный оператор, действующий из Y'_s в X'_s, и

$$\|T\| = \|T'\|. \tag{3}$$

Доказательство. Из определяющего равенства $\langle Tx, y'\rangle = \langle x, x'\rangle$ мы выводим

$$\|T'y'\| = \|x'\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle x, x'\rangle| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle Tx, y'\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \|y'\| \cdot \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| \leqslant \|y'\| \cdot \|T\|;$$

это означает, что $\|T'\| \leqslant \|T\|$. Обратное неравенство доказывается следующим образом. Для всякого элемента $x_0 \in X$ найдется функционал $f_0 \in Y'$, такой, что $\|f_0\| = 1$ и $f_0(Tx_0) = \langle Tx_0, f_0\rangle = \|Tx_0\|$. Поэтому элемент $f'_0 = T'f_0$ удовлетворяет равенству $\langle x_0, f'_0\rangle = \|Tx_0\|$ и, следовательно,

$$\|Tx_0\| = \langle x_0, T'f_0\rangle \leqslant \|T'\| \cdot \|f_0\| \cdot \|x_0\| = \|T'\| \cdot \|x_0\|,$$
$$\text{т. е. } \|T\| \leqslant \|T'\|.$$

Теорема 3. (1°) Если операторы T и S принадлежат $L(X, Y)$, то $(\alpha T + \beta S)' = (\alpha T' + \beta S')$. (2°) Рассмотрим линейные операторы T, S, области определения $D(T)$, $D(S)$ и области значений $R(T)$ и $R(S)$ которых принадлежат X. Тогда если $S \in L(X, X)$ и $D(T)^a = X$, то

$$(ST)' = T'S'. \tag{4}$$

Если, кроме того, $D(TS)^a = X$, то

$$(TS)' \supseteq S'T', \text{ т. е. } (TS)' \text{ — расширение оператора } S'T'. \tag{5}$$

Доказательство. Утверждение (1°) очевидно. Докажем (2°). Если $y \in D((ST)')$, то для любого $x \in D(T) = D(ST)$ выполняется равенство $\langle Tx, S'y\rangle = \langle STx, y\rangle = \langle x, (ST)'y\rangle$. Это показывает, что $S'y \in D(T')$ и $T'S'y = (ST)'y$, т. е. $(ST)' \subseteq T'S'$. Обратно, пусть $y \in D(T'S')$, т. е. $S'y \in D(T')$. Тогда для любого $x \in D(T) = D(ST)$ справедливо равенство $\langle STx, y\rangle = \langle Tx, S'y\rangle = \langle x, T'S'y\rangle$. Последнее означает, что $y \in D((ST)')$ и $(ST)'y = T'S'y$, поэтому $T'S' \subseteq (ST)'$. Таким образом, формула (4) доказана.

Чтобы доказать включение (5), возьмем $y \in D(S'T') = D(T')$. Тогда $\langle TSx, y\rangle = \langle Sx, T'y\rangle = \langle x, S'T'y\rangle$ для всех $x \in D(TS)$. Отсюда $y \in D((TS)')$ и $(TS)'y = S'T'y$, т. е. $S'T' \subseteq (TS)'$.