## 2. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве

Обобщение понятия *транспонированной комплексно сопряженной матрицы* приводит к понятию *сопряженного оператора в гильбертовом пространстве.*

**Определение 1.** Пусть линейный оператор $T$ отображает область $D(T) \subseteq X$ в $Y$, где $X$ и $Y$ — гильбертовы пространства. Допустим, что $D(T)^a = X$, и обозначим через $T'$ оператор, сопряженный к $T$. Таким образом, $\langle Tx, y'\rangle = \langle x, T'y'\rangle$ для всех $x \in D(T)$, $y' \in D(T')$. Обозначим через $J_X$ взаимно однозначное сохраняющее норму сопряженно-линейное отображение $X'_s \ni f \longleftrightarrow y_f \in X$, определенное в следствии 1 § 6 гл. III. Обратное отображение обозначим через $J_Y$. Тогда

$$\langle Tx, y'\rangle = y'(Tx) = (Tx, J_Y y'),$$
$$\langle x, T'y'\rangle = (T'y')(x) = (x, J_X T'y').$$

Следовательно,

$$(Tx, J_Y y') = (x, J_X T'y'), \text{ т. е. } (Tx, y) = \left(x, J_X T' J_Y^{-1} y\right).$$

В частном случае, когда $X = Y$, мы будем писать

$$J_X T' J_X^{-1} = T^*$$

и называть $T^*$ *оператором, сопряженным* к оператору $T$, отображающему гильбертово пространство $X$ на себя.

**Замечание.** Если $X$ — конечномерное комплексное гильбертово пространство ($l^2$), то, как и в примерах предыдущего параграфа, легко убедиться в том, что оператору $T^*$ соответствует матрица, транспонированная и комплексно сопряженная к матрице оператора $T$.

Как и в предыдущем параграфе, можно доказать следующую теорему.

**Теорема 1.** Оператор $T^*$ существует тогда и только тогда, когда $D(T)^a = X$. Если это условие выполнено, то оператор $T^*$ определяется следующим образом: элемент $y \in X$ принадлежит $D(T^*)$ тогда и только тогда, когда существует элемент $y^* \in X$, такой, что

$$(Tx, y) = (x, y^*) \text{ для всех } x \in D(T). \tag{1}$$

При этом $T^*y = y^*$.

Эту теорему можно сформулировать в других терминах, если использовать понятие графика $G(A)$ линейного оператора $A$ (определение см. в § 6 гл. II).

**Теорема 2.** Определим непрерывный линейный оператор $V$, отображающий пространство $X \times X$ в себя:

$$V\{x, y\} = \{-y, x\}. \tag{2}$$

Тогда для того чтобы множество $(VG(T))^{\perp}$ было графиком некоторого линейного оператора, необходимо и достаточно, чтобы $D(T)^a = X$.

В этом случае

$$G(T^*) = (VG(T))^{\perp}. \tag{3}$$

**Доказательство.** Условие $\{-Tx, x\} \perp \{y, y^*\}$ эквивалентно равенству $(Tx, y) = (x, y^*)$. Поэтому теорема 2 следует из теоремы 1.

**Следствие.** Оператор $T^*$ — это замкнутый линейный оператор, так как ортогональное дополнение всякого линейного подпространства образует замкнутое линейное подпространство.

**Теорема 3.** Пусть $T$ — линейный оператор, отображающий область $D(T) \subseteq X$ в пространство $X$, причем $D(T)^a = X$. Тогда для того чтобы оператор $T$ допускал замкнутое линейное расширение, необходимо и достаточно, чтобы существовал оператор $T^{**} = (T^*)^*$, т. е. чтобы $D(T^*)^a = X$.

**Доказательство.** *Достаточность.* По определению $T^{**} \supseteq T$, поэтому оператор $T^{**} = (T^*)^*$, согласно предыдущему следствию, замкнут.

*Необходимость.* Пусть $S$ — замкнутое расширение оператора $T$. Тогда график $G(S)$ содержит $G(T)^a$ как замкнутое линейное подпространство, поэтому $G(T)^a$ представляет собой график некоторого линейного оператора. Ввиду непрерывности скалярного произведения $G(T)^a = G(T)^{\perp\perp} = (G(T)^{\perp})^{\perp}$; кроме того, так как $VG(T^*) = G(T)^{\perp}$, мы получаем $(VG(T^*))^{\perp} = G(T)^{\perp\perp}$. Поэтому $(VG(T^*))^{\perp}$ — это график некоторого линейного оператора. Значит, согласно теореме 2, $D(T^*)^a = X$, и оператор $T^{**}$ существует.

**Следствие.** Если для оператора $T$ выполняется условие $D(T)^a = X$, то этот оператор является замкнутым и линейным тогда и только тогда, когда $T = T^{**}$.

**Доказательство.** Достаточность этого условия очевидна. Необходимость вытекает из доказанной выше формулы $G(T)^a = G(T^{**})$. В самом деле, равенство $G(T) = G(T)^a$ показывает, что $T = T^{**}$.

**Теорема 4.** Если линейный оператор $T$ определен во всем пространстве $X$ и замкнут, то он непрерывен.

**Доказательство.** Утверждение следует из теоремы о замкнутом графике.

**Теорема 5.** Если $T$ — ограниченный линейный оператор, то $T^*$ — тоже ограниченный линейный оператор и

$$\|T\| = \|T^*\|. \tag{4}$$

**Доказательство.** Доказательство проводится так же, как в предыдущем параграфе.

### *3. Симметрические и самосопряженные операторы*

Эрмитовой матрицей называется матрица, совпадающая со своей транспонированной комплексно сопряженной матрицей. Известно, что такую матрицу можно привести к диагональному виду с помощью