В этом случае

$$G(T^*) = (VG(T))^{\perp}. \tag{3}$$

Доказательство. Условие $\{-Tx, x\} \perp \{y, y^*\}$ эквивалентно равенству $(Tx, y) = (x, y^*)$. Поэтому теорема 2 следует из теоремы 1.

Следствие. Оператор T^* — это замкнутый линейный оператор, так как ортогональное дополнение всякого линейного подпространства образует замкнутое линейное подпространство.

Теорема 3. Пусть T — линейный оператор, отображающий область $D(T) \subseteq X$ в пространство X, причем $D(T)^a = X$. Тогда для того чтобы оператор T допускал замкнутое линейное расширение, необходимо и достаточно, чтобы существовал оператор $T^{**} = (T^*)^*$, т. е. чтобы $D(T^*)^a = X$.

Доказательство. *Достаточность.* По определению $T^{**} \supseteq T$, поэтому оператор $T^{**} = (T^*)^*$, согласно предыдущему следствию, замкнут.

Необходимость. Пусть S — замкнутое расширение оператора T. Тогда график $G(S)$ содержит $G(T)^a$ как замкнутое линейное подпространство, поэтому $G(T)^a$ представляет собой график некоторого линейного оператора. Ввиду непрерывности скалярного произведения $G(T)^a = G(T)^{\perp\perp} = \left(G(T)^{\perp}\right)^{\perp}$; кроме того, так как $VG(T^*) = G(T)^{\perp}$, мы получаем $(VG(T^*))^{\perp} = G(T)^{\perp\perp}$. Поэтому $(VG(T^*))^{\perp}$ — это график некоторого линейного оператора. Значит, согласно теореме 2, $D(T^*)^a = X$, и оператор T^{**} существует.

Следствие. Если для оператора T выполняется условие $D(T)^a = X$, то этот оператор является замкнутым и линейным тогда и только тогда, когда $T = T^{**}$.

Доказательство. Достаточность этого условия очевидна. Необходимость вытекает из доказанной выше формулы $G(T)^a = G(T^{**})$. В самом деле, равенство $G(T) = G(T)^a$ показывает, что $T = T^{**}$.

Теорема 4. Если линейный оператор T определен во всем пространстве X и замкнут, то он непрерывен.

Доказательство. Утверждение следует из теоремы о замкнутом графике.

Теорема 5. Если T — ограниченный линейный оператор, то T^* — тоже ограниченный линейный оператор и

$$\|T\| = \|T^*\|. \tag{4}$$

Доказательство. Доказательство проводится так же, как в предыдущем параграфе.

3. Симметрические и самосопряженные операторы

Эрмитовой матрицей называется матрица, совпадающая со своей транспонированной комплексно сопряженной матрицей. Известно, что такую матрицу можно привести к диагональному виду с помощью поворота в комплексном векторном пространстве, на котором эта матрица действует как линейный оператор. Обобщение понятия эрмитовой матрицы приводит к понятию самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.

Определение 1. Пусть X — гильбертово пространство. Линейный оператор T, действующий из области $D(T) \subseteq X$ в пространство X, называется *симметрическим*[1]), если $T^* \supseteq T$, т. е. если T^* служит расширением оператора T. Заметим, что если оператор T^* существует, то $D(T)^a = X$.

Предложение 1. Если оператор T — симметрический, то T^{**} — тоже симметрический.

Доказательство. Так как оператор T симметрический, имеем $D(T^*) \supseteq D(T)$ и $D(T)^a = X$. Поэтому $D(T^*)^a = X$ и, следовательно, оператор $T^{**} = (T^*)^*$ существует. Оператор T^{**} безусловно является расширением T, так что $D(T^{**}) \supseteq D(T)$. Еще раз используя, что $D(T)^a = X$, мы видим, что $D(T^{**})^a = X$, и поэтому существует оператор $T^{***} = (T^{**})^*$. Поскольку $T^* \supseteq T$, имеем $T^{**} \subseteq T^*$, и поэтому $T^{***} \supseteq T^{**}$. Отсюда следует, что T^{**} — симметрический оператор.

Следствие. Всякий симметрический оператор T обладает замкнутым симметрическим расширением $T^{**} = (T^*)^*$.

Определение 2. Линейный оператор T называется *самосопряженным*, если $T = T^*$.

Предложение 2. Всякий самосопряженный оператор замкнут. Если симметрический оператор определен во всем пространстве, то он является ограниченным и самосопряженным.

Доказательство. Будучи сопряженным самому себе, самосопряженный оператор замкнут. Второе утверждение следует из того, что определенный во всем пространстве замкнутый оператор ограничен (теорема о замкнутом графике).

Пример 1 (интегральный оператор типа Гильберта — Шмидта). Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$. Рассмотрим пространство $L^2(a, b)$. Через $K(s, t)$ обозначим комплексную функцию, измеримую в области $a \leqslant s,\ t \leqslant b$ и удовлетворяющую условию

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds\, dt < \infty.$$

Для функций $x(t) \in L^2(a, b)$ определим оператор K формулой

$$(K \cdot x)(s) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt.$$

---

[1]) Симметрические операторы называют также эрмитовыми. — *Прим. перев.*

Из неравенства Шварца и теоремы Фубини — Тонелли следует, что

$$\int_a^b |(K \cdot x)(s)|^2 ds \leqslant \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 dt\, ds \int_a^b |x(t)|^2 dt.$$

Таким образом, K — ограниченный линейный оператор, отображающий пространство $L^2(a, b)$ в себя, причем

$$\|K\| \leqslant \left(\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds\, dt \right)^{1/2}.$$

Нетрудно показать, что оператор K^* определяется формулой $(K^*y)(t) = \int_a^b \overline{K(s, t)}\, y(s)\, ds$. Таким образом, оператор K будет самосопряженным в том и только в том случае, когда $K(s, t) = \overline{K(t, s)}$ почти всюду в области изменения переменных t, s.

Пример 2 (оператор координаты в квантовой механике). Пусть $X = L^2(-\infty, \infty)$. Обозначим через D множество $D = \{x(t);\ x(t)$ и $t \cdot x(t)$ принадлежат $L^2(-\infty, \infty)\}$. Тогда оператор T, определенный на множестве D формулой $Tx(t) = t \cdot x(t)$, является самосопряженным.

Доказательство. Ясно, что $D^a = X$, так как линейные комбинации характеристических функций конечных интервалов образуют в $L^2(-\infty, \infty)$ сильно плотное множество. Пусть $y \in D(T^*)$; положим $T^*y = y^*$. Тогда для всех $x \in D = D(T)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t x(t) \overline{y(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{y^*(t)} dt.$$

Если за $x(t)$ принять характеристическую функцию интервала $[\alpha, t_0]$, то $\int_\alpha^{t_0} t \cdot \overline{y(t)}\, dt = \int_\alpha^{t_0} y^*(t)\, dt$, и поэтому, дифференцируя, мы находим, что почти всюду $t_0 \cdot \overline{y(t_0)} = \overline{y^*(t_0)}$. Таким образом, $y \in D$ и $T^*y(t) = t \cdot y(t)$. Обратно, ясно, что если $y \in D$, то $y \in D(T^*)$ и $T^*y(t) = t \cdot y(t)$.

Пример 3 (оператор импульса в квантовой механике). Пусть $X = L^2(-\infty, \infty)$. Обозначим через D совокупность всех абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке функций $x(t) \in L^2(-\infty, \infty)$, обладающих производными $x'(t) \in L^2(-\infty, \infty)$. Тогда формула $Tx(t) = i^{-1}x'(t)$ определяет в области D самосопряженный линейный оператор.

Доказательство. Определим семейство непрерывных функций $x_n(t)$, заданных при $t \in (-\infty, \infty)$ и зависящих от параметра α:

$$x_n(t) = 1 \quad \text{при} \quad t \in [\alpha, t_0],$$
$$x_n(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \leqslant \alpha - n^{-1} \quad \text{и} \quad t \geqslant t_0 + n^{-1},$$
$$x_n(t) \text{ — линейная функция на отрезках}$$
$$[\alpha - n^{-1}, \alpha] \quad \text{и} \quad [t_0, t_0 + n^{-1}].$$

Линейные комбинации функций вида $x_n(t)$ со всевозможными значениями α, t_0 и n образуют в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ плотное множество. Поэтому и множество D плотно в X.

Пусть $y \in D(T^*)$ и $T^*y = y^*$. Тогда для всех $x \in D$

$$\int_{-\infty}^{\infty} i^{-1} x'(t)\overline{y(t)}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y^*(t)}\,dt.$$

Если за $x(t)$ принять функцию $x_n(t)$, то

$$n \int_{\alpha - n^{-1}}^{\alpha} i^{-1}\overline{y(t)}\,dt - n \int_{t_0}^{t_0+n^{-1}} i^{-1}\overline{y(t)}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_n(t)\,y^*(t)\,dt.$$

Отсюда, полагая $n \to \infty$, мы получаем, что $i^{-1}(\overline{y(\alpha)} - \overline{y(t_0)}) = \int_{\alpha}^{t_0} \overline{y^*(t)}\,dt$ для почти всех значений α и t_0. Из неравенства Шварца следует, что функция $y^*(t)$ интегрируема на всяком конечном интервале. Значит, функция $y(t_0)$ абсолютно непрерывна по t_0 на любом конечном интервале, и поэтому $i^{-1}y'(t_0) = y^*(t_0)$ при почти всех t_0. Следовательно, $y \in D$ и $T^*y(t) = i^{-1}y'(t)$. Обратно, пусть $y \in D$. Тогда, интегрируя по частям, мы обнаруживаем, что

$$\int_a^b i^{-1}x'(t)\overline{y(t)}\,dt = i^{-1}\,[x(t)\overline{y(t)}]_a^b + \int_a^b x(t)\overline{(i^{-1}y'(t))}\,dt.$$

Из интегрируемости произведения $x(t)\overline{y(t)}$ в области $(-\infty, \infty)$ мы заключаем, что $\lim\limits_{a \downarrow -\infty,\, b \uparrow \infty} \left|[x(t)\overline{y(t)}]_a^b\right| = 0$, откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} i^{-1}x'(t)\overline{y(t)}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{(i^{-1}y'(t))}\,dt.$$

Значит, $y \in D(T^*)$ и $T^*y(t) = i^{-1}y'(t)$.

Теорема 1. Если самосопряженный оператор T имеет обратный оператор T^{-1}, то T^{-1} тоже оказывается самосопряженным оператором.

Доказательство. Равенство $T=T^*$ эквивалентно соотношению $(VG(T))^{\perp}=G(T)$. Кроме того, $G(T^{-1})=VG(-T)$. Поэтому, учитывая, что $(-T)^*=-T^*=-T$, получаем $(VG(-T))^{\perp}=G(-T)$, и, следовательно,

$$(VG(T^{-1}))^{\perp}=G(-T)^{\perp}=(VG(-T))^{\perp\perp}=VG(-T)=G(T^{-1}).$$

Последнее означает, что $(T^{-1})^*=T^{-1}$. В этом доказательстве мы использовали тот факт, что $(VG(-T))^a=VG(-T)$ вследствие замкнутости оператора $(-T)$.

Следствие. Если для симметрического оператора T в гильбертовом пространстве X выполняется условие $D(T)=X$ или условие $R(T)=X$, то этот оператор самосопряженный.

Доказательство. Случай $D(T)=X$ уже был рассмотрен. Обратимся к условию $R(T)=X$. Если $Tx=0$, то $0=(Tx, y)=(x, Ty)$ для всех $y \in D(T)$. Так как $R(T)=X$, то из полученных соотношений следует, что $x=0$. Поэтому обратный оператор T^{-1} существует и непременно является симметрическим, как и T. Но $D(T^{-1})= =R(T)=X$, и поэтому определенный во всем пространстве симметрический оператор T^{-1} должен быть самосопряженным. Тогда по теореме 1 и оператор $T=(T^{-1})^{-1}$ будет самосопряженным.

Самосопряженные операторы можно строить при помощи замкнутого линейного оператора. Точнее, справедлива

Теорема 2 (фон Нейман [5]). Если замкнутый линейный оператор T, заданный в гильбертовом пространстве X, удовлетворяет условию $D(T)^a=X$, то операторы T^*T и TT^* оказываются самосопряженными, а операторы $(I+T^*T)$ и $(I+TT^*)$ (тоже самосопряженные) обладают ограниченными обратными линейными операторами.

Доказательство. Мы знаем, что множества $G(T)$ и $VG(T^*)$ образуют в произведении $X \times X$ замкнутые линейные подпространства, ортогональные друг другу и порождающие пространство $X \times X$. Таким образом, для всякого $h \in X$ имеет место однозначно определенное разложение

$$\{h, 0\}=\{x, Tx\}+\{-T^*y, y\}, \text{ где } x \in D(T), \ y \in D(T^*). \quad (1)$$

Поэтому $h=x-T^*y$, $0=Tx+y$. Следовательно,

$$x \in D(T^*T) \quad \text{и} \quad x+T^*Tx=h. \quad (2)$$

Вследствие единственности разложения (1) элемент x однозначно определяется элементом h, и поэтому существует определенный во всем пространстве X обратный оператор $(I+T^*T)^{-1}$.

Для любых $h, k \in X$ положим

$$x=(I+T^*T)^{-1}h, \quad y=(I+T^*T)^{-1}k.$$

Тогда x и y принадлежат области $D(T^*T)$, и так как оператор T замкнут, то $(T^*)^* = T$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\left(h,\ (I+T^*T)^{-1}k\right) &= ((I+T^*T)x,\ y) = (x,\ y) + (T^*Tx,\ y) = \\ &= (x,\ y) + (Tx,\ Ty) = (x,\ y) + (x,\ T^*Ty) = \\ &= (x,\ (I+T^*T)y) = \left((I+T^*T)^{-1}h,\ k\right),\end{aligned}$$

откуда вытекает, что $(I+T^*T)^{-1}$ — самосопряженный оператор. При этом оператор $(I+T^*T)^{-1}$ как самосопряженный оператор, определенный во всем пространстве, ограничен. По теореме 1 обратный к нему оператор $(I+T^*T)$ тоже является самосопряженным. Поэтому и оператор T^*T самосопряжен.

Поскольку оператор T замкнут, $(T^*)^* = T$, и из доказанного выше вытекает, что $TT^* = (T^*)^*T^*$ — самосопряженный оператор и оператор $(I+TT^*)$ обладает ограниченным линейным обратным. Теорема доказана.

Теперь мы приведем пример несамосопряженного симметрического оператора.

Пример 4. Пусть $X = L^2(0,\ 1)$. Обозначим через D совокупность всех абсолютно непрерывных функций $x(t) \in L^2(0,\ 1)$, удовлетворяющих условиям $x(0) = x(1) = 0$ и $x'(t) \in L^2(0,\ 1)$. Тогда оператор T_1, определенный формулой $T_1x(t) = i^{-1}x'(t)$ в области $D = D(T_1)$, является симметрическим, но не самосопряженным.

Доказательство. Мы докажем, что $T_1^* = T_2$, где оператор T_2 определяется условием

$$T_2x(t) = i^{-1}x'(t) \quad \text{для} \quad x(t) \in D(T_2),$$

$$D(T_2) = \{x(t) \in L^2(0,\ 1);\ x(t) \text{ — абсолютно непрерывные функции, такие, что } x'(t) \in L^2(0,\ 1)\}.$$

Множество $D = D(T_1)$ плотно в $L^2(0,\ 1)$, поэтому оператор T_1^* существует. Пусть $y \in D\left(T_1^*\right)$ и $T_1^*y = y^*$. Тогда для любой функции $x \in D = D(T_1)$

$$\int_0^1 i^{-1}x'(t)\overline{y(t)}\,dt = \int_0^1 x(t)\overline{y^*(t)}\,dt.$$

Интегрируя по частям и вспоминая, что $x(0) = x(1) = 0$, находим

$$\int_0^1 x(t)\overline{y^*(t)}\,dt = -\int_0^1 x'(t)\overline{Y^*(t)}\,dt, \quad \text{где} \quad Y^*(t) = \int_0^t y^*(s)\,ds.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $x(1)=\int_0^1 x'(t)\,dt=0$, мы получаем, что для любой постоянной c

$$\int_0^1 x'(t)\left(\overline{Y^*(t)}-\overline{i^{-1}y(t)}-\overline{c}\right)dt=0 \quad \text{при всех } x\in D(T_1).$$

С другой стороны, для всякой функции $z(t)\in L^2(0,1)$ функция $Z(t)=\int_0^t z(t)\,dt-t\int_0^1 z(t)\,dt$ безусловно принадлежит $D(T_1)$. Поэтому, принимая $Z(t)$ за $x(t)$, мы получаем

$$\int_0^1\left\{z(t)-\int_0^1 z(t)\,dt\right\}\left(\overline{Y^*(t)}-\overline{i^{-1}y(t)}-\overline{c}\right)dt=0.$$

Если теперь выбрать постоянную c так, что $\int_0^1\left(Y^*(t)-i^{-1}y(t)-c\right)dt=0$, то окажется, что

$$\int_0^1 z(t)\left(\overline{Y^*(t)}-\overline{i^{-1}y(t)}-\overline{c}\right)dt=0.$$

Следовательно, ввиду произвольности $z\in L^2(0,1)$ должно выполняться равенство $Y^*(t)=\int_0^t y^*(t)\,dt=i^{-1}y(t)+c$. Значит, $y\in D(T_2)$ и $T_2y=y^*$. Это и показывает, что $T_1^*\subseteq T_2$. При помощи интегрирования по частям можно также получить, что $T_2\subseteq T_1^*$, и поэтому $T_2=T_1^*$.

Теорема 3. Если оператор H ограничен и самосопряжен, то

$$\|H\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|(Hx,x)|. \tag{3}$$

Доказательство. Положим $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}|(Hx,x)|=\gamma$. Так как $|(Hx,x)|\leqslant\|Hx\|\cdot\|x\|$, имеем $\gamma\leqslant\|H\|$. Для любого вещественного λ

$$|(H(y\pm\lambda z),\ y\pm\lambda z)|=|(Hy,y)\pm 2\lambda\,\mathrm{Re}(Hy,z)+\lambda^2(Hz,z)|\leqslant \leqslant\gamma\|y\pm\lambda z\|^2.$$

Следовательно,

$$|4\lambda\,\mathrm{Re}(Hy,z)|\leqslant\gamma(\|y+\lambda z\|^2+\|y-\lambda z\|^2)=2\gamma(\|y\|^2+\lambda^2\|z\|^2).$$

Взяв $\lambda = \|y\|/\|z\|$, мы приходим к неравенству $|\mathrm{Re}(Hy, z)| \leqslant \gamma \|y\| \cdot \|z\|$. Подставляя $ze^{i\theta}$ вместо z, мы выводим соотношение $|(Hy, z)| \leqslant \leqslant \gamma \|y\| \cdot \|z\|$, откуда $(Hy, Hy) = \|Hy\|^2 \leqslant \gamma \|y\| \cdot \|Hy\|$, т. е. $\|H\| \leqslant \gamma$.

4. Унитарные операторы. Преобразование Кэли

Симметрический оператор, вообще говоря, может и не быть ограниченным. При исследовании свойств симметрического оператора H существенную роль играет непрерывный оператор $(H - iI)(H + iI)^{-1}$, который называется *преобразованием Кэли* оператора H. Мы начнем с определения понятия изометрического оператора.

Определение 1. Ограниченный линейный оператор T, отображающий гильбертово пространство X в себя, называется *изометрическим*, если он не изменяет величины скалярного произведения:

$$(Tx, Ty) = (x, y) \text{ для всех } x, y \in X. \tag{1}$$

Если, в частности, $R(T) = X$, то изометрический оператор T называется *унитарным* оператором.

Предложение 1. Для ограниченного линейного оператора T условие (1) эквивалентно другому условию изометрии:

$$\|Tx\| = \|x\| \text{ для всех } x \in X. \tag{2}$$

Доказательство. Совершенно ясно, что из (1) вытекает условие (2).

Допустим теперь, что выполняется (2). Тогда

$$4\,\mathrm{Re}(Tx, Ty) = \|T(x+y)\|^2 - \|T(x-y)\|^2 = \\ = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\,\mathrm{Re}(x, y).$$

Заменяя y на iy, мы видим, что $4\,\mathrm{Im}(Tx, Ty) = 4\,\mathrm{Im}(x, y)$; таким образом, действительно из требования (2) следует (1).

Предложение 2. Ограниченный линейный оператор T, отображающий гильбертово пространство X в себя, является унитарным тогда и только тогда, когда $T^* = T^{-1}$.

Доказательство. Если оператор T унитарный, то условие (2) обеспечивает существование обратного оператора, и при этом $D(T^{-1}) = R(T) = X$. Далее из условия (1) следует, что $T^*T = I$, и поэтому $T^* = T^{-1}$. Обратно, если оператор T удовлетворяет условию $T^* = T^{-1}$, то $T^*T = I$, откуда следует инвариантность скалярного произведения. Кроме того, $R(T) = D(T^{-1}) = D(T^*) = X$, так как $T^* = T^{-1}$, и, следовательно, оператор T унитарный.

Пример 1. Пусть $X = L^2(-\infty, \infty)$. Тогда оператор T, определяемый условием $Tx(t) = x(t + a)$, где a — произвольное вещественное число, представляет собой унитарный оператор, заданный в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$.