Взяв $\lambda=\|y\|/\|z\|$, мы приходим к неравенству $|\mathrm{Re}(Hy, z)|\leqslant\gamma\|y\|\cdot\|z\|$. Подставляя $ze^{i\theta}$ вместо z, мы выводим соотношение $|(Hy, z)|\leqslant \leqslant\gamma\|y\|\cdot\|z\|$, откуда $(Hy, Hy)=\|Hy\|^2\leqslant\gamma\|y\|\cdot\|Hy\|$, т. е. $\|H\|\leqslant\gamma$.

4. Унитарные операторы. Преобразование Кэли

Симметрический оператор, вообще говоря, может и не быть ограниченным. При исследовании свойств симметрического оператора H существенную роль играет непрерывный оператор $(H-iI)(H+iI)^{-1}$, который называется *преобразованием Кэли* оператора H. Мы начнем с определения понятия изометрического оператора.

Определение 1. Ограниченный линейный оператор T, отображающий гильбертово пространство X в себя, называется *изометрическим*, если он не изменяет величины скалярного произведения:

$$(Tx, Ty)=(x, y) \text{ для всех } x, y \in X. \tag{1}$$

Если, в частности, $R(T)=X$, то изометрический оператор T называется *унитарным* оператором.

Предложение 1. Для ограниченного линейного оператора T условие (1) эквивалентно другому условию изометрии:

$$\|Tx\|=\|x\| \text{ для всех } x\in X. \tag{2}$$

Доказательство. Совершенно ясно, что из (1) вытекает условие (2).

Допустим теперь, что выполняется (2). Тогда

$$\begin{aligned} 4\,\mathrm{Re}(Tx, Ty) &= \|T(x+y)\|^2-\|T(x-y)\|^2= \\ &= \|x+y\|^2-\|x-y\|^2=4\,\mathrm{Re}(x, y). \end{aligned}$$

Заменяя y на iy, мы видим, что $4\,\mathrm{Im}(Tx, Ty)=4\,\mathrm{Im}(x, y)$; таким образом, действительно из требования (2) следует (1).

Предложение 2. Ограниченный линейный оператор T, отображающий гильбертово пространство X в себя, является унитарным тогда и только тогда, когда $T^*=T^{-1}$.

Доказательство. Если оператор T унитарный, то условие (2) обеспечивает существование обратного оператора, и при этом $D(T^{-1})=R(T)=X$. Далее из условия (1) следует, что $T^*T=I$, и поэтому $T^*=T^{-1}$. Обратно, если оператор T удовлетворяет условию $T^*=T^{-1}$, то $T^*T=I$, откуда следует инвариантность скалярного произведения. Кроме того, $R(T)=D(T^{-1})=D(T^*)=X$, так как $T^*=T^{-1}$, и, следовательно, оператор T унитарный.

Пример 1. Пусть $X=L^2(-\infty, \infty)$. Тогда оператор T, определяемый условием $Tx(t)=x(t+a)$, где a — произвольное вещественное число, представляет собой унитарный оператор, заданный в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$.

Пример 2. Преобразование Фурье пространства $L^2(R^n)$ на себя является унитарным, так как при этом скалярное произведение $(f, g) = \int\limits_{R^n} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ не меняется.

Определение 2. Пусть X — гильбертово пространство. Линейный оператор T, отображающий область $D(T) \subseteq X$ в X и обладающий тем свойством, что $D(T)^a = X$, называется *нормальным*, если

$$TT^* = T^*T. \tag{3}$$

Самосопряженные и унитарные операторы являются нормальными.

Преобразование Кэли

Теорема 1 (фон Нейман [1]). Пусть H — замкнутый симметрический линейный оператор в гильбертовом пространстве X. Тогда существует непрерывный (не обязательно определенный во всем пространстве X) обратный оператор $(H + iI)^{-1}$, а оператор

$$\begin{gathered} U_H = (H - iI)(H + iI)^{-1} \\ \text{с областью определения } D(U_H) = D\left((H + iI)^{-1}\right) \end{gathered} \tag{4}$$

является замкнутым и *изометрическим* $\left(\|U_H x\| = \|x\|\right)$; кроме того, существует обратный оператор $(I - U_H)^{-1}$ и

$$H = i(I + U_H)(I - U_H)^{-1}. \tag{5}$$

Поэтому, в частности, множество $D(H) = R(I - U_H)$ плотно в X.

Определение 3. Оператор U_H называется *преобразованием Кэли* оператора H.

Доказательство теоремы 1. Для любого элемента $x \in D(H)$

$$((H \pm iI)x, (H \pm iI)x) = (Hx, Hx) \pm (Hx, ix) \pm (ix, Hx) + (x, x).$$

Из свойства симметрии оператора H следует, что $(Hx, ix) = -i(Hx, x) = -i(x, Hx) = -(ix, Hx)$, и поэтому

$$\|(H \pm iI)x\|^2 = \|Hx\|^2 + \|x\|^2. \tag{6}$$

Следовательно, равенство $(H + iI)x = 0$ означает, что $x = 0$, и поэтому существует обратный оператор $(H + iI)^{-1}$. Этот оператор оказывается непрерывным, так как $\|(H + iI)x\| \geqslant \|x\|$. Из (6) видно, что $\|U_H y\| = \|y\|$, т. е. оператор U_H изометричен.

Убедимся в том, что оператор U_H замкнут. В самом деле, пусть $(H + iI)x_n = y_n \to y$ и $(H - iI)x_n = z_n \to z$ при $n \to \infty$. Тогда, используя равенство (6), мы видим, что $\|y_n - y_m\|^2 = \|H(x_n - x_m)\|^2 + \|x_n - x_m\|^2$, откуда $(x_n - x_m) \to 0$, $H(x_n - x_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$.

Оператор H замкнут, поэтому $x = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in D(H)$ и $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} Hx_n = Hx$. Таким образом, $(H+iI)x_n \to y = (H+iI)x$, $(H-iI)x_n \to z = (H-iI)x$ и, следовательно, $U_H y = z$, а это и означает, что оператор U_H замкнут.

Из равенств $y = (H+iI)x$ и $U_H y = (H-iI)x$ мы выводим соотношения $2^{-1}(I-U_H)y = ix$ и $2^{-1}(I+U_H)y = Hx$. Поэтому если $(I-U_H)y = 0$, то $x = 0$, откуда $(I+U_H)y = 2Hx = 0$. Но тогда $y = 2^{-1}((I-U_H)y + (I+U_H)y) = 0$. Следовательно, обратный оператор $(I-U_H)^{-1}$ действительно существует. Эти же вычисления показывают, что

$$Hx = 2^{-1}(I+U_H)y = i(I+U_H)(I-U_H)^{-1}x,$$

$$\text{т. е.}\quad H = i(I+U_H)(I-U_H)^{-1}.$$

Теорема 2 (фон Нейман [1]). Пусть U — замкнутый изометрический оператор, такой, что $R(I-U)^a = X$. Тогда существует единственным образом определенный замкнутый симметрический оператор H, для которого U служит преобразованием Кэли.

Доказательство. Убедимся сначала в существовании обратного оператора $(I-U)^{-1}$. Допустим, что $(I-U)y = 0$. Для любого $z = (I-U)w \in R(I-U)$ в силу изометричности оператора U мы имеем $(y, w) = (Uy, Uw)$. Следовательно,

$$(y, z) = (y, w) - (y, Uw) = (Uy, Uw) - (y, Uw) = (Uy - y, Uw) = 0.$$

Поскольку $R(I-U)^a = X$, из последнего равенства следует, что $y = 0$. Поэтому обратный оператор $(I-U)^{-1}$ существует. Положим $H = i(I+U)(I-U)^{-1}$. Тогда множество $D(H) = D\big((I-U)^{-1}\big) = R(I-U)$ плотно в X. Покажем, что H — симметрический оператор. Возьмем произвольные элементы x, $y \in D(H) = R(I-U)$ и положим $x = (I-U)u$, $y = (I-U)w$, где $u, w \in X$. Тогда $(Uu, Uw) = (u, w)$, и поэтому

$$(Hx, y) = (i(I+U)u, (I-U)w) = i((Uu, w) - (u, Uw)) =$$
$$= ((I-U)u, i(I+U)w) = (x, Hy),$$

т. е. оператор H симметрический. Теперь нужно показать, что $U_H = U$. Для элемента $x = (I-U)u$ имеет место равенство $Hx = i(I+U)u$, и поэтому $(H+iH)x = 2iu$, $(H-iI)x = 2iUu$. Таким образом, $D(U_H) = \{2iu;\ u \in D(U)\} = D(U)$ и $U_H(2iu) = 2iUu = U(2iu)$, откуда $U_H = U$.

Для завершения доказательства теоремы 2 покажем, что оператор H замкнут. В самом деле, оператор H отображает множество всех элементов вида $(I-U)u$ на множество элементов вида $i(I+U)u$. Если две последовательности вида $(I-U)u_n$ и $i(I+U)u_n$ сходятся при $n \to \infty$, то последовательности u_n и Uu_n тоже сходятся при $n \to \infty$. Так как U — замкнутый оператор, то

$$u_n \to u, \qquad (I-U)u_n \to (I-U)u; \qquad i(I+U)u_n \to i(I+U)u.$$

Отсюда и следует, что оператор H — замкнутый.

Следующая теорема касается структуры оператора, сопряженного симметрическому оператору.

Теорема 3 (фон Нейман [1]). Пусть H — замкнутый симметрический оператор в гильбертовом пространстве X. Положим

$$X_H^+ = D(U_H)^\perp, \qquad X_H^- = R(U_H)^\perp, \tag{7}$$

где $U_H = (H - iI)(H + iI)^{-1}$ — преобразование Кэли оператора H. Тогда

$$X_H^+ = \{x \in X;\ H^*x = ix\}, \qquad X_H^- = \{x \in X;\ H^*x = -ix\}, \tag{8}$$

и всякий элемент $x \in D(H^*)$ представляется единственным образом в виде

$$x = x_0 + x_1 + x_2, \quad \text{где} \quad x_0 \in D(H),\ x_1 \in X_H^+,\ x_2 \in X_H^-,$$

так что

$$H^*x = Hx_0 + ix_1 + (-ix_2). \tag{9}$$

Доказательство. Если $x \in D(U_H)^\perp = D\big((H+iI)^{-1}\big)^\perp$, то $(x, (H+iI)y) = 0$ при всех $y \in D(H)$. Следовательно, $(x, Hy) = -(x, iy) = (ix, y)$, и поэтому $x \in D(H^*)$, $H^*x = ix$. Из последнего условия вытекает, что $(x, (H+iI)y) = 0$ для всех $y \in D(H)$, т. е. $x \in D\big((H+iI)^{-1}\big)^\perp = D(U_H)^\perp$. Тем самым доказано первое из соотношений (8); второе доказывается аналогично.

Множества $D(U_H)$ и $R(U_H)$ образуют в X замкнутые линейные подпространства, так как U_H — замкнутый изометрический оператор. Следовательно, всякий элемент $x \in X$ единственным образом разлагается в сумму элемента из $D(U_H)$ и элемента из $D(U_H)^\perp$. Рассматривая такое ортогональное разложение элемента $(H^* + iI)x$, мы получаем

$$(H^* + iI)x = (H + iI)x_0 + x', \quad \text{где} \quad x_0 \in D(H), \quad x' \in D(U_H)^\perp.$$

Но $(H + iI)x_0 = (H^* + iI)x_0$, так как $x_0 \in D(H)$ и $H \subseteq H^*$. Кроме того, поскольку $x' \in D(U_H)^\perp$ и имеет место формула (8), $H^*x' = ix'$. Таким образом,

$$x' = (H^* + iI)x_1, \qquad x_1 = (2i)^{-1}x' \in D(U_H)^\perp,$$

и поэтому

$$(H^* + iI)x = (H^* + iI)x_0 + (H^* + iI)x_1,$$

где

$$x_0 \in D(H), \quad x_1 \in D(U_H)^\perp.$$

Следовательно, учитывая (8), мы видим, что $(x - x_0 - x_1) \in R(U_H)^\perp$, так как $H^*(x - x_0 - x_1) = -i(x - x_0 - x_1)$. Тем самым доказывается свойство (9). Остается доказать единственность разложения (9). Это делается следующим образом. Допустим, что $0 = x_0 + x_1 + x_2$, где $x_0 \in D(H)$, $x_1 \in D(U_H)^\perp$, $x_2 \in R(U_H)^\perp$. Тогда, так как $H^*x_0 = Hx_0$, $H^*x_1 = ix_1$, $H^*x_2 = -ix_2$, мы имеем

$$0 = (H^* + iI)\,0 = (H^* + iI)(x_0 + x_1 + x_2) = (H + iI)\,x_0 + 2ix_1.$$

Отсюда $(H + iI)\,x_0 = 0$, $2ix_1 = 0$, так как всякий элемент пространства X единственным образом разлагается в сумму элементов множеств $D(U_H)$ и $D(U_H)^\perp$. Эти рассуждения показывают, что существует обратный оператор $(H + iI)^{-1}$, и поэтому $x_0 = 0$ и $x_2 = 0 - x_0 - x_1 = = 0 - 0 - 0 = 0$. Поэтому разложение вида (9) единственно для любого элемента множества $D(H^*)$.

Следствие. Замкнутый симметрический линейный оператор H в гильбертовом пространстве X является самосопряженным тогда и только тогда, когда оператор U_H (преобразование Кэли оператора H) унитарен.

Доказательство. Условие $D(H) = D(H^*)$ эквивалентно требованию $D(U_H)^\perp = R(U_H)^\perp = \{0\}$. Последнее же соотношение в свою очередь эквивалентно тому, что оператор U_H унитарен, т. е. отображает пространство X на себя взаимно однозначно и изометрично.

5. Операторы с замкнутой областью значений

Теорема Банаха [1] об операторах, имеющих замкнутую область значений, формулируется следующим образом.

Теорема. Рассмотрим два B-пространства X и Y; пусть T — замкнутый оператор, действующий из X в Y, такой, что $D(T)^a = X$. Тогда следующие четыре утверждения эквивалентны:

$$\text{множество } R(T) \text{ замкнуто в } Y; \tag{1}$$

$$\text{множество } R(T') \text{ замкнуто в } X'; \tag{2}$$

$$R(T) = N(T')^\perp \equiv \{y \in Y;\ \langle y, y^* \rangle = 0 \text{ для всех } y^* \in N(T')\}; \tag{3}$$

$$R(T') = N(T)^\perp \equiv \{x^* \in X',\ \langle x, x^* \rangle = 0 \text{ для всех } x \in N(T)\}\,^{1)}. \tag{4}$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы мы разобьем на пять этапов.

I. Доказательство эквивалентности $(1) \longleftrightarrow (2)$ можно свести к частному случаю, когда T — непрерывный линейный оператор, такой, что $D(T) = X$.

---

[1]) Здесь $N(T)$ и $N(T')$ — нуль-многообразия операторов T и T', т. е. $N(T) = \{x \in X;\ Tx = 0\}$, $N(T') = \{y^* \in Y';\ T'y^* = 0\}$. — *Прим. перев.*