Следовательно, учитывая (8), мы видим, что $(x - x_0 - x_1) \in R(U_H)^{\perp}$, так как $H^*(x - x_0 - x_1) = -i(x - x_0 - x_1)$. Тем самым доказывается свойство (9). Остается доказать единственность разложения (9). Это делается следующим образом. Допустим, что $0 = x_0 + x_1 + x_2$, где $x_0 \in D(H)$, $x_1 \in D(U_H)^{\perp}$, $x_2 \in R(U_H)^{\perp}$. Тогда, так как $H^*x_0 = Hx_0$, $H^*x_1 = ix_1$, $H^*x_2 = -ix_2$, мы имеем

$$0 = (H^* + iI)\,0 = (H^* + iI)(x_0 + x_1 + x_2) = (H + iI)\,x_0 + 2ix_1.$$

Отсюда $(H + iI)\,x_0 = 0$, $2ix_1 = 0$, так как всякий элемент пространства X единственным образом разлагается в сумму элементов множеств $D(U_H)$ и $D(U_H)^{\perp}$. Эти рассуждения показывают, что существует обратный оператор $(H + iI)^{-1}$, и поэтому $x_0 = 0$ и $x_2 = 0 - x_0 - x_1 = 0 - 0 - 0 = 0$. Поэтому разложение вида (9) единственно для любого элемента множества $D(H^*)$.

Следствие. Замкнутый симметрический линейный оператор H в гильбертовом пространстве X является самосопряженным тогда и только тогда, когда оператор U_H (преобразование Кэли оператора H) унитарен.

Доказательство. Условие $D(H) = D(H^*)$ эквивалентно требованию $D(U_H)^{\perp} = R(U_H)^{\perp} = \{0\}$. Последнее же соотношение в свою очередь эквивалентно тому, что оператор U_H унитарен, т. е. отображает пространство X на себя взаимно однозначно и изометрично.

5. Операторы с замкнутой областью значений

Теорема Банаха [1] об операторах, имеющих замкнутую область значений, формулируется следующим образом.

Теорема. Рассмотрим два B-пространства X и Y; пусть T — замкнутый оператор, действующий из X в Y, такой, что $D(T)^a = X$. Тогда следующие четыре утверждения эквивалентны:

$$\text{множество } R(T) \text{ замкнуто в } Y; \tag{1}$$

$$\text{множество } R(T') \text{ замкнуто в } X'; \tag{2}$$

$$R(T) = N(T')^{\perp} \equiv \{y \in Y;\ \langle y, y^* \rangle = 0 \text{ для всех } y^* \in N(T')\}; \tag{3}$$

$$R(T') = N(T)^{\perp} \equiv \{x^* \in X',\ \langle x, x^* \rangle = 0 \text{ для всех } x \in N(T)\}^{1)}. \tag{4}$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы мы разобьем на пять этапов.

I. Доказательство эквивалентности $(1) \longleftrightarrow (2)$ можно свести к частному случаю, когда T — непрерывный линейный оператор, такой, что $D(T) = X$.

---

[1]) Здесь $N(T)$ и $N(T')$ — нуль-многообразия операторов T и T', т. е. $N(T) = \{x \in X;\ Tx = 0\}$, $N(T') = \{y^* \in Y';\ T'y^* = 0\}$. — *Прим. перев.*

График $G = G(T)$ оператора T образует в пространстве $X \times Y$ замкнутое линейное подпространство, поэтому множество G с нормой $\|\{x, y\}\| = \|x\| + \|y\|$ пространства $X \times Y$ является B-пространством. Определим равенством

$$S\{x, Tx\} = Tx$$

непрерывный линейный оператор S, отображающий пространство G в Y. Тогда сопряженный к S оператор S' линейно и непрерывно отображает Y' в G', и при этом

$$\langle\{x, Tx\}, S'y^*\rangle = \langle S\{x, Tx\}, y^*\rangle = \langle Tx, y^*\rangle = \langle\{x, Tx\}, \{0, y^*\}\rangle,$$
$$x \in D(T), \ y^* \in Y'.$$

Следовательно, функционал $S' \ y^* - \{0, y^*\} \in (X \times Y)' = X' \times Y'$ обращается в нуль во всех точках области G. Но условие $\langle\{x, Tx\}, \{x^*, y_1^*\}\rangle = 0 \left(x \in D(T), \ y_1^* \in Y', x^* \in X'\right)$ эквивалентно требованию $\langle x, x^*\rangle = \langle -Tx, \ y_1^*\rangle \, (x \in D(T))$, т. е. равенству $-T'y_1^* = x^*$. Поэтому

$$S' \cdot y^* = \{0, y^*\} + \{-T'y_1^*, y_1^*\} = \{-T'y_1^*, y^* + y_1^*\}, \ y^* \in Y'.$$

Так как элемент y^* был выбран произвольно, мы видим, что $R(S') = R(-T') \times Y' = R(T') \times Y'$. Поэтому множество $R(S')$ замкнуто в пространстве $X' \times Y'$ тогда и только тогда, когда $R(T')$ замкнуто в X', и так как $R(S) = R(T)$, множество $R(S)$ замкнуто в Y тогда и только тогда, когда $R(T)$ замкнуто в Y. Таким образом, действительно достаточно доказать эквивалентность условий $(1) \longleftrightarrow (2)$ в частном случае ограниченного линейного оператора S вместо исходного оператора T.

II. Пусть T — ограниченный линейный оператор, отображающий B-пространство X в B-пространство Y. Докажем, что в этом случае $(1) \to (2)$.

Мы будем рассматривать T как ограниченный линейный оператор T_1, отображающий пространство X в B-пространство $Y_1 = R(T)^a = R(T)$. Нужно показать, что справедливо утверждение (2). Для элементов $y_1^* \in Y_1'$ оператор T_1' определяется соотношением

$$\langle T_1 x, y_1^*\rangle = \langle Tx, y_1^*\rangle = \langle x, T_1' y_1^*\rangle, \qquad x \in D(T_1) = D(T) = X.$$

По теореме Хана — Банаха функционал y_1^* может быть продолжен до функционала $y^* \in Y'$ таким образом, что $\langle Tx, y_1^*\rangle = \langle Tx, y^*\rangle$ $(x \in D(T) = X)$. Следовательно, $T_1' y_1^* = T' y_1^*$, и поэтому $R(T_1') = R(T')$. Таким образом, мы можем, не ограничивая общности, считать, что $R(T) = Y$. Тогда по теореме об открытости отображения (гл. II, § 5) найдется такое $c > 0$, что для каждого $y \in Y$ существует элемент $x \in X$, удовлетворяющий условиям $Tx = y$, $\|x\| \leqslant c\|y\|$. Поэтому для всякого y^* из $D(T')$

$$|\langle y, y^*\rangle| = |\langle Tx, y^*\rangle| = |\langle x, T'y^*\rangle| \leqslant \|x\|\cdot\|T'y^*\| \leqslant c\|y\|\cdot\|T'y^*\|.$$

Следовательно,

$$\|y^*\| = \sup_{\|y\|\leqslant 1} |\langle y, y^*\rangle| \leqslant c\|T'y^*\|,$$

и, таким образом, обратный оператор $(T')^{-1}$ существует и непрерывен. Более того, оператор $(T')^{-1}$, будучи обратным к непрерывному линейному оператору, является замкнутым линейным оператором. Отсюда видно, что область $D\big((T')^{-1}\big) = R(T')$ должна быть замкнутой в X'.

III. Пусть X и Y — два B-пространства и T — ограниченный линейный оператор, отображающий X в Y. Тогда (2)$\to$(1).

Как и на втором этапе доказательства, будем рассматривать T как ограниченный линейный оператор T_1, отображающий X в B-пространство $Y_1 = R(T)^a$. Условие $T_1'y_1^* = 0$ влечет за собой соотношение

$$\langle T_1x, y_1^*\rangle = \langle Tx, y_1^*\rangle = \langle x, T_1'y_1^*\rangle = 0, \quad x \in D(T_1) = D(T) = X,$$

а это означает, что $y_1^* = 0$, так как множество $R(T_1) = R(T)$ плотно в пространстве $Y_1 = R(T)^a$. Таким образом, должен существовать оператор, обратный к T_1'. Как было показано, множество $R(T') = R(T_1')$ замкнуто, поэтому T_1' — непрерывный линейный оператор, отображающий B-пространство $\big(R(T)^a\big)' = Y_1'$ на B-пространство $R(T_1')$ взаимно однозначно. Тогда по теореме об открытости отображения оператор $(T_1')^{-1}$ непрерывен.

Теперь мы докажем, что множество $R(T)$ замкнуто. С этой целью достаточно показать, что утверждение

> существует такая положительная постоянная ε, что образ $\{T_1x;\ \|x\|\leqslant\varepsilon\}$ множества $\{x;\ \|x\|\leqslant\varepsilon\}$ не является плотным ни в каком шаре вида $\|y\|\leqslant n^{-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ пространства $Y_1 = R(T)^a = R(T_1)^a$,

приводит к противоречию.

В самом деле, если это утверждение неверно, то, как показывает доказательство теоремы об открытости отображения, $R(T_1) = R(T) = Y_1$. Итак, допустим, что существует последовательность $\{y_n\} \subseteq Y_1$, такая, что

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n = 0, \qquad y_n \notin \{T_1x;\ \|x\|\leqslant\varepsilon\}^a \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Так как $\{T_1x;\ \|x\|\leqslant\varepsilon\}^a$ — замкнутое выпуклое уравновешенное множество B-пространства Y_1, то по теореме Мазура (гл. IV, § 6) существуют определенные на B-пространстве Y_1 непрерывные линейные функционалы f_n, такие, что

$$f_n(y_n) > \sup_{\|x\| \leqslant \varepsilon} |f_n(T_1 x)| \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому $\|T_1' f_n\| < \varepsilon^{-1} \|f_n\| \cdot \|y_n\|$, а так как $s\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, то оператор T_1' не может иметь непрерывного обратного. Последний вывод неверен, и, следовательно, множество $R(T)$ должно быть замкнутым.

IV. Покажем, что $(1) \to (3)$. Во-первых, очевидно, что соотношение

$$\langle Tx, y^*\rangle = \langle x, T'y^*\rangle, \quad x \in D(T), \quad y^* \in D(T')$$

влечет за собой включение $R(T) \subseteq N(T')^{\perp}$. Покажем, что если условие (1) выполняется, то $N(T')^{\perp} \subseteq R(T)$. Для этого предположим, что существует некоторый элемент $y_0 \in N(T')^{\perp}$, не принадлежащий $R(T)$. Тогда по теореме Хана — Банаха найдется такой элемент $y_0^* \in Y'$, что $\langle y_0, y_0^*\rangle \neq 0$ и $\langle Tx, y_0^*\rangle = 0$ для всех $x \in D(T)$. Отсюда мы заключаем, что $\langle x, T'y_0^*\rangle = 0$ $(x \in D(T))$ и, следовательно, $T'y_0^* = 0$, т. е. $y_0 \notin N(T')^{\perp}$. Но последнее неверно, и поэтому $N(T')^{\perp} \subseteq R(T)$. Импликация $(3) \to (1)$ очевидна, так как множество $N(T')^{\perp}$ замкнуто вследствие непрерывности выражения $\langle y, y^*\rangle$ по переменной y.

V. Убедимся в том, что $(2) \to (4)$. Включение $R(T') \subseteq N(T)^{\perp}$ получается так же, как в случае утверждения (3). Докажем, что из (2) следует включение $N(T)^{\perp} \subseteq R(T')$. С этой целью возьмем элемент $x^* \in N(T)^{\perp}$ и для всякого элемента вида $y = Tx$ определим функционал $f_1(y)$ формулой $f_1(y) = \langle x, x^*\rangle$. Это однозначная функция y, так как из равенства $Tx = Tx'$ следует, что $(x - x') \in N(T)$, и, поскольку $x^* \in N(T)^{\perp}$, имеем $\langle (x - x'), x^*\rangle = 0$. Поэтому $f_1(y)$ — действительно линейный функционал, определенный для элементов вида $y = Tx$. Из утверждения (2) следует (1), поэтому, применяя теорему об открытости отображения к оператору S, построенному на первом этапе доказательства, мы можем выбрать решения x_n уравнений $y_n = Tx_n$ при произвольно заданных значениях y_n таким образом, чтобы из соотношения $s\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ вытекало условие $s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Итак, $f_1(y) = \langle x, x^*\rangle$ — непрерывный линейный функционал, определенный на множестве $Y_1 = R(T)$. Пусть $f \in Y'$ — продолжение функционала f_1. Тогда

$$f(Tx) = f_1(Tx) = \langle x, x^*\rangle.$$

Это показывает, что $T'f = x^*$. Следовательно, $N(T)^{\perp} \subseteq R(T')$.

Тот факт, что из (4) следует (2), очевиден, так как $\langle x, x^*\rangle$ — непрерывный линейный функционал относительно x.

Следствие 1. Пусть X и Y — два B-пространства и T — замкнутый линейный оператор, отображающий область $D(T) \subseteq X$ в Y, такой, что $D(T)^a = X$. В этом случае

$$R(T) = Y \text{ тогда и только тогда, когда оператор } T' \text{ имеет непрерывный обратный;} \tag{5}$$

$$R(T') = X' \text{ тогда и только тогда, когда оператор } T \text{ имеет непрерывный обратный.} \tag{6}$$

Доказательство. Предположим, что $R(T) = Y$. Тогда если $T'y^* = 0$, то в силу условия $\langle Tx, y^*\rangle = \langle x, T'y^*\rangle$ $(x \in D(T))$ мы имеем $y^* = 0$, откуда следует существование обратного оператора $(T')^{-1}$. Так как $R(T) = Y$ и выполняется условие (2), множество $R(T')$ замкнуто; таким образом, по теореме о замкнутом графике оператор $(T')^{-1}$ непрерывен.

Допустим, что оператор T' имеет непрерывный обратный. Тогда $N(T') = \{0\}$, и поэтому, согласно (3), $R(T) = Y$.

Предположим, что $R(T') = X'$. Тогда если $Tx = 0$, то ввиду соотношения $\langle Tx, y^*\rangle = \langle x, T'y^*\rangle$ $(y^* \in D(T'))$ можно утверждать, что $x = 0$, т. е. оператор T имеет обратный оператор T^{-1}. Так как справедливо утверждение (1) и $R(T') = X'$, то множество $R(T)$ замкнуто; по теореме о замкнутом графике оператор T^{-1} должен быть непрерывным.

Наконец, предположим, что оператор T имеет непрерывный обратный T^{-1}. В этом случае $N(T) = \{0\}$ и из (4) следует, что $R(T') = X'$.

Следствие 2. Пусть X — гильбертово пространство со скалярным произведением (u, v) и T — замкнутый линейный оператор, такой, что область определения $D(T) \subseteq X$ плотна в X и $R(T) \subseteq X$. Допустим, что существует такая положительная постоянная c, что

$$\operatorname{Re}(Tu, u) \geqslant c\|u\|^2 \quad \text{для всех} \quad u \in D(T). \tag{7}$$

Тогда $R(T^*) = X$.

Доказательство. Неравенство Шварца показывает, что

$$\|Tu\| \cdot \|u\| \geqslant \operatorname{Re}(Tu, u) \geqslant c\|u\|^2 \quad \text{для всех} \quad u \in D(T).$$

Поэтому $\|Tu\| \geqslant c\|u\|$ $(u \in D(T))$ и, следовательно, существует непрерывный обратный оператор T^{-1}. Применяя предыдущее следствие, мы видим, что $R(T') = X$. Таким образом, $R(T^*) = R(T') = X$.

Замечание. Линейный оператор T, отображающий область $D(T) \subseteq X$ в X, называется *диссипативным*, если

$$\operatorname{Re}(Tu, u) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad u \in D(T). \tag{8}$$

Условие (7) означает, таким образом, что оператор $(-T)$ „строго“ диссипативен.

Литература к главе VII

Общие сведения, касающиеся гильбертовых пространств, см. в работах М. Стоуна [1], Ахиезера — Глазмана [1], Данфорда — Шварца [5].

Теорема об операторах с замкнутой областью значений по существу доказана еще в работе Банаха [1].