ГЛАВА VIII

# Резольвента и спектр

Пусть область определения $D(T)$ и область значений $R(T)$ линейного оператора $T$ лежат в одном и том же комплексном линейном топологическом пространстве $X$. Рассмотрим линейный оператор

$$T_\lambda = \lambda I - T,$$

где $\lambda$ — произвольное комплексное число, а $I$ — тождественный оператор. Исследование множества тех значений $\lambda$, при которых оператор $T_\lambda$ не имеет обратного оператора, и изучение свойств оператора, обратного к $T_\lambda$, в тех случаях, когда он существует, составляют содержание так называемой *спектральной теории операторов*.

Нам предстоит, таким образом, изучить общую теорию операторов, обратных операторам типа $T_\lambda$.

## *1. Резольвента и спектр*

**Определение.** Если при $\lambda = \lambda_0$ область значений $R(T_{\lambda_0})$ плотна в пространстве $X$ и оператор $T_{\lambda_0}$ обладает непрерывным обратным оператором $(\lambda_0 I - T)^{-1}$, то говорят, что комплексное число $\lambda_0$ принадлежит *резольвентному множеству* $\rho(T)$ оператора $T$. Оператор $(\lambda_0 I - T)^{-1}$ мы обозначим через $R(\lambda_0; T)$ и назовем *резольвентой* оператора $T$ в точке $\lambda = \lambda_0$. Совокупность всех комплексных чисел $\lambda$, не принадлежащих резольвентному множеству $\rho(T)$, называется *спектром* оператора $T$; это множество мы обозначим через $\sigma(T)$. Спектр $\sigma(T)$ можно разбить на три попарно непересекающихся множества $P_\sigma(T)$, $C_\sigma(T)$ и $R_\sigma(T)$, определяемых следующими условиями:

$P_\sigma(T)$ — множество комплексных чисел $\lambda$, при которых оператор $T_\lambda$ не имеет обратного; $P_\sigma(T)$ называется *точечным спектром* оператора $T$.

$C_\sigma(T)$ — множество комплексных чисел $\lambda$, при которых оператор $T_\lambda$ обладает обратным оператором с плотной в $X$ областью определения, но оператор $T_\lambda^{-1}$ не является непрерывным; $C_\sigma(T)$ называется *непрерывным спектром* оператора $T$.

$R_\sigma(T)$ — множество комплексных чисел $\lambda$, таких, что $T_\lambda$ имеет обратный оператор, область определения которого не является плотной в $X$; $R_\sigma(T)$ называется *остаточным спектром* оператора $T$.

Из приведенных определений, учитывая линейность оператора $T$, мы выводим следующее

**Предложение.** Для того чтобы $\lambda_0 \in P_\sigma(T)$, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $Tx = \lambda_0 x$ имело ненулевое решение $x \neq 0$. В этом случае число $\lambda_0$ называется *собственным значением* оператора $T$, а решение $x$ — *собственным вектором* оператора $T$, соответствующим собственному значению $\lambda_0$. Нуль-подпространство $N(\lambda_0 I - T)$ оператора $T_{\lambda_0}$ называется *собственным подпространством* оператора $T$, соответствующим собственному значению $\lambda_0$. Оно состоит из вектора $x = 0$ и всех собственных векторов, соответствующих $\lambda_0$. Размерность собственного подпространства, соответствующего $\lambda_0$, называется *кратностью* собственного значения $\lambda_0$.

**Теорема.** Пусть $X$ — комплексное $B$-пространство и $T$ — замкнутый линейный оператор, область определения и область значений которого принадлежат $X$. Тогда при любом $\lambda_0 \in \rho(T)$ резольвента $(\lambda_0 I - T)^{-1}$ представляет собой непрерывный линейный оператор, определенный во всем пространстве $X$.

**Доказательство.** Поскольку $\lambda_0$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(T)$, множество $R(\lambda_0 I - T) = D\left((\lambda_0 I - T)^{-1}\right)$ плотно в $X$, причем существует такая положительная постоянная $c$, что

$$\|(\lambda_0 I - T)x\| \geqslant c\|x\| \quad \text{при всех} \quad x \in D(T).$$

Мы должны показать, что $R(\lambda_0 I - T) = X$. Предположим, что для некоторой последовательности $\{x_n\} \subseteq X$ существует предел $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda_0 I - T)x_n = y$. Тогда из написанного выше неравенства следует, что предел $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ тоже существует. Так как оператор $T$ — замкнутый, то $(\lambda_0 I - T)x = y$. Поэтому $R(\lambda_0 I - T) = X$, ибо, согласно предположениям теоремы, $R(\lambda_0 I - T)^a = X$.

**Пример 1.** Если пространство $X$ конечномерно, то всякому ограниченному линейному оператору $T$ соответствует некоторая матрица $(t_{ij})$. Как известно, собственными значениями оператора $T$ являются в этом случае корни так называемого *векового*, или *характеристического, уравнения* матрицы $(t_{ij})$:

$$\det(\lambda\delta_{ij} - t_{ij}) = 0, \tag{1}$$

где $\det(A)$ обозначает определитель матрицы $A$[1]).

[1]) Заметим, что кратность *характеристического корня* $\lambda_0$ как корня уравнения (1) может оказаться большей или равной (но не меньшей), чем кратность собственного значения $\lambda_0$, определенная как размерность соответствующего собственного подпространства. — *Прим. перев.*

**Пример 2.** Пусть $X = L^2(-\infty, \infty)$ и оператор $T$ определяется формулой

$$T \cdot x(t) = tx(t).$$

Здесь, таким образом, $D(T) = \{x(t);\ x(t),\ tx(t) \in L^2(-\infty, \infty)\}$ и $Tx(t) = tx(t)$ для $x(t) \in D(T)$. Тогда всякое вещественное число $\lambda_0$ принадлежит непрерывному спектру $C_\sigma(T)$.

**Доказательство.** Условие $(\lambda_0 I - T)x = 0$ означает здесь, что $(\lambda_0 - t)x(t) = 0$ почти всюду, и поэтому почти всюду $x(t) = 0$. Следовательно, при любом вещественном $\lambda_0$ оператор $(\lambda_0 I - T)^{-1}$ существует. Все функции $y(t) \in L^2(-\infty, \infty)$, обращающиеся тождественно в нуль в некоторой окрестности точки $t = \lambda_0$ (эти окрестности могут быть разными для различных функций $y(t)$), входят поэтому в область определения $D\left((\lambda_0 I - T)^{-1}\right)$. Следовательно, множество $D\left((\lambda_0 I - T)^{-1}\right)$ плотно в $L^2(-\infty, \infty)$. С другой стороны, легко видеть, что оператор $(\lambda_0 I - T)^{-1}$ не является ограниченным на совокупности таких функций $y(t)$.

**Пример 3.** Примем за $X$ гильбертово пространство $(l^2)$ и определим оператор $T_0$ условием

$$T_0(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots).$$

Тогда число $\lambda = 0$ принадлежит остаточному спектру оператора $T$, так как множество $R(T_0)$ не является плотным в $X$.

**Пример 4.** Обозначим через $H$ самосопряженный оператор, заданный в гильбертовом пространстве $X$. Тогда всякое комплексное число $\lambda$, для которого $\operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$, входит в резольвентное множество $\rho(H)$ и резольвента $R(\lambda; H)$ представляет собой ограниченный линейный оператор, удовлетворяющий оценке

$$\|R(\lambda; H)\| \leqslant \frac{1}{|\operatorname{Im}(\lambda)|}. \tag{2}$$

Кроме того,

$$\operatorname{Im}((\lambda I - H)x, x) = \operatorname{Im}(\lambda)\|x\|^2 \quad \text{для всех} \quad x \in D(H). \tag{3}$$

**Доказательство.** Если $x \in D(H)$, то скалярное произведение $(Hx, x)$ вещественно, так как $(Hx, x) = (x, Hx) = \overline{(Hx, x)}$. Отсюда следует условие (3). Применяя далее неравенство Шварца, мы приходим к неравенству

$$\|(\lambda I - H)x\| \cdot \|x\| \geqslant |((\lambda I - Hx), x)| \geqslant |\operatorname{Im}(\lambda)| \cdot \|x\|^2, \tag{4}$$

откуда видно, что

$$\|(\lambda I - H)x\| \geqslant |\operatorname{Im}(\lambda)| \cdot \|x\|, \qquad x \in D(H). \tag{5}$$

Следовательно, если $\operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$, то обратный оператор $(\lambda I - H)^{-1}$ существует. Кроме того, область значений $R(\lambda I - H)$ плотна в $X$, если выполняется условие $\operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$. В самом деле, в противном случае должен был бы существовать элемент $y \neq 0$, ортогональный $R(\lambda I - H)$, и для этого $y$ при всех $x \in D(H)$ выполнялось бы условие $((\lambda I - H)x, y) = 0$, что эквивалентно требованию $(x, (\bar{\lambda} I - H)y) = 0$ для всех $x \in D(H)$. Но область определения $D(H)$ самосопряженного оператора $H$ плотна в $X$, поэтому из условия $(x, (\bar{\lambda} I - H)y) = 0$ при всех $x \in D(H)$ вытекает, что $(\bar{\lambda} I - H)y = 0$, т. е. $Hy = \bar{\lambda} y$, а это противоречит тому, что значение $(Hy, y)$ вещественно.

Таким образом, по доказанной выше теореме при всяком комплексном $\lambda$, для которого $\operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$, резольвента $R(\lambda; H)$ представляет собой ограниченный линейный оператор, удовлетворяющий оценке (2).

## 2. *Резольвентное уравнение и спектральный радиус*

**Теорема 1.** Пусть $T$ — замкнутый линейный оператор, область определения и область значений которого принадлежат комплексному $B$-пространству $X$. Тогда резольвентное множество $\rho(T)$ образует открытую область комплексной плоскости и функция $R(\lambda; T)$ голоморфна по $\lambda$ в каждой из компонент области $\rho T$ (компонентой называется максимальное связное подмножество).

**Доказательство.** По теореме предыдущего параграфа резольвента $R(\lambda; T)$ при всяком $\lambda \in \rho(T)$ представляет собой непрерывный линейный оператор, определенный во всем пространстве $X$. Пусть $\lambda_0 \in \rho(T)$; рассмотрим ряд

$$S(\lambda) = R(\lambda_0; T)\left\{I + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0; T)^n\right\}. \tag{1}$$

Этот ряд сходится по норме операторов в круге $\|R(\lambda_0; T)\| \cdot |\lambda_0 - \lambda| < 1$ комплексной плоскости и определяет внутри этого круга голоморфную функцию переменной $\lambda$. Если умножить $S(\lambda)$ слева или справа на $(\lambda - \lambda_0)I + (\lambda_0 I - T) = (\lambda I - T)$, то получится тождественный оператор $I$; это означает, что ряд $S(\lambda)$ представляет резольвенту $R(\lambda; T)$. Тем самым показано, что при любом $\lambda_0 \in \rho(T)$ существует круговая окрестность точки $\lambda_0$, принадлежащая $\rho(T)$, в которой резольвента $R(\lambda; T)$ голоморфна.

**Теорема 2.** Если $\lambda$ и $\mu$ принадлежат $\rho(T)$ и если операторы $R(\lambda; T)$ и $R(\mu; T)$ определены во всем пространстве $X$ и непрерывны, то справедливо равенство

$$R(\lambda; T) - R(\mu; T) = (\mu - \lambda) R(\lambda; T) R(\mu; T), \tag{2}$$

которое называется *резольвентным уравнением*[1]).

---

[1]) Равенство (2) называют также *тождеством Гильберта.* — *Прим. перев.*