если выполняется условие $\operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$. В самом деле, в противном случае должен был бы существовать элемент $y \neq 0$, ортогональный $R(\lambda I - H)$, и для этого y при всех $x \in D(H)$ выполнялось бы условие $((\lambda I - H)x, y) = 0$, что эквивалентно требованию $(x, (\bar{\lambda} I - H)y) = 0$ для всех $x \in D(H)$. Но область определения $D(H)$ самосопряженного оператора H плотна в X, поэтому из условия $(x, (\bar{\lambda} I - H)y) = 0$ при всех $x \in D(H)$ вытекает, что $(\bar{\lambda} I - H)y = 0$, т. е. $Hy = \bar{\lambda} y$, а это противоречит тому, что значение (Hy, y) вещественно.

Таким образом, по доказанной выше теореме при всяком комплексном λ, для которого $\operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$, резольвента $R(\lambda; H)$ представляет собой ограниченный линейный оператор, удовлетворяющий оценке (2).

2. *Резольвентное уравнение и спектральный радиус*

Теорема 1. Пусть T — замкнутый линейный оператор, область определения и область значений которого принадлежат комплексному B-пространству X. Тогда резольвентное множество $\rho(T)$ образует открытую область комплексной плоскости и функция $R(\lambda; T)$ голоморфна по λ в каждой из компонент области ρT (компонентой называется максимальное связное подмножество).

Доказательство. По теореме предыдущего параграфа резольвента $R(\lambda; T)$ при всяком $\lambda \in \rho(T)$ представляет собой непрерывный линейный оператор, определенный во всем пространстве X. Пусть $\lambda_0 \in \rho(T)$; рассмотрим ряд

$$S(\lambda) = R(\lambda_0; T)\left\{I + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0; T)^n\right\}. \tag{1}$$

Этот ряд сходится по норме операторов в круге $\|R(\lambda_0; T)\| \cdot |\lambda_0 - \lambda| < 1$ комплексной плоскости и определяет внутри этого круга голоморфную функцию переменной λ. Если умножить $S(\lambda)$ слева или справа на $(\lambda - \lambda_0)I + (\lambda_0 I - T) = (\lambda I - T)$, то получится тождественный оператор I; это означает, что ряд $S(\lambda)$ представляет резольвенту $R(\lambda; T)$. Тем самым показано, что при любом $\lambda_0 \in \rho(T)$ существует круговая окрестность точки λ_0, принадлежащая $\rho(T)$, в которой резольвента $R(\lambda; T)$ голоморфна.

Теорема 2. Если λ и μ принадлежат $\rho(T)$ и если операторы $R(\lambda; T)$ и $R(\mu; T)$ определены во всем пространстве X и непрерывны, то справедливо равенство

$$R(\lambda; T) - R(\mu; T) = (\mu - \lambda) R(\lambda; T) R(\mu; T), \tag{2}$$

которое называется *резольвентным уравнением* [1]).

[1]) Равенство (2) называют также *тождеством Гильберта*. — *Прим. перев.*

Доказательство. Непосредственные вычисления дают

$$R(\lambda;\ T)=R(\lambda;\ T)(\mu I-T)R(\mu;\ T)=R(\lambda;\ T)\{(\mu-\lambda)I+\\+(\lambda I-T)\}R(\mu;\ T)=(\mu-\lambda)R(\lambda;\ T)R(\mu;\ T)+R(\mu;\ T).$$

Теорема 3. Если ограниченный линейный оператор T отображает комплексное B-пространство X в себя, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}=r_\sigma(T). \tag{3}$$

Предел $r_\sigma(T)$ называется *спектральным радиусом* оператора T; для него имеет место оценка

$$r_\sigma(T)\leqslant\|T\|. \tag{4}$$

Если $|\lambda|>r_\sigma(T)$, то резольвента $R(\lambda;\ T)$ существует и представляется рядом вида

$$R(\lambda;\ T)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n}T^{n-1}, \tag{5}$$

который сходится по норме операторов.

Доказательство. Положим $\inf\limits_{n\geqslant 1}\|T^n\|^{1/n}=r$. Достаточно показать, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|T^n\|^{1/n}\leqslant r$. Для каждого $\varepsilon>0$ выберем такое целое положительное число m, что $\|T^m\|^{1/m}\leqslant r+\varepsilon$. Далее для произвольного целого n обозначим через q величину, удовлетворяющую условиям $n=pm+q$, $0\leqslant q\leqslant(m-1)$ (p — целое). Тогда, используя неравенство $\|AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|$, мы получаем

$$\|T^n\|^{1/n}\leqslant\|T^m\|^{p/n}\cdot\|T\|^{q/n}\leqslant(r+\varepsilon)^{mp/n}\|T\|^{q/n}.$$

Поскольку $pm/n\to 1$ и $q/n\to 0$ при $n\to\infty$, должно выполняться неравенство $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|T^n\|^{1/n}\leqslant r+\varepsilon$. Так как ε было выбрано произвольно, отсюда следует, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|T^n\|^{1/n}\leqslant r$, что и доказывает существование предела $r_\sigma(T)=\lim\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}$.

Поскольку $\|T^n\|\leqslant\|T\|^n$, мы имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}\leqslant\|T\|$. Отсюда следует, что ряд (5) сходится по норме операторов при $\lambda>r_\sigma(T)$. В самом деле, если $|\lambda|\geqslant r_\sigma+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$, то, согласно (3), $\|\lambda^{-n}T^n\|\leqslant(r_\sigma(T)+\varepsilon)^{-n}\cdot(r_\sigma(T)+2^{-1}\varepsilon)^n$ для достаточно больших значений n, откуда видно, что ряд (5) сходится. Умножая этот ряд на $(\lambda I-T)$ слева или справа, мы получаем тождественный оператор I, поэтому резольвента $R(\lambda;\ T)$ действительно представляется рядом (5).

Следствие. Для всякого ограниченного линейного оператора T, отображающего B-пространство X в себя, резольвентное множество $\rho(T)$ непусто.

Теорема 4. Для всякого ограниченного линейного оператора $T \in L(X, X)$ (где X — некоторое B-пространство) имеет место формула

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|. \tag{6}$$

Доказательство. По теореме 3 имеем $r_\sigma(T) \geqslant \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$. Поэтому остается лишь установить неравенство $r_\sigma(T) \leqslant \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$.

Функция $R(\lambda; T)$, согласно теореме 1, голоморфна по λ при $|\lambda| > \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$. Поэтому она обладает однозначно определенным разложением в ряд Лорана по положительным и неположительным степеням λ, сходящимся по норме операторов при $|\lambda| > \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$. По теореме 3 этот ряд Лорана должен совпадать с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} T^{n-1}$. Следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} \|\lambda^{-n} T^n\| = 0$ при $|\lambda| > \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$, и поэтому для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших значениях n выполняется неравенство $\|T^n\| \leqslant \leqslant \left(\varepsilon + \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|\right)^n$. Это показывает, что

$$r_\sigma(T) = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n} \leqslant \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Следствие. Если $|\lambda| < r_\sigma(T)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} T^{n-1}$ расходится.

Доказательство. Обозначим через r наименьшее неотрицательное число, такое, что при $|\lambda| > r$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} T^{n-1}$ сходится по норме операторов. Существование такого числа $r \geqslant 0$ доказывается так же, как в случае обычных числовых рядов по степеням λ^{-1}. Тогда при $|\lambda| > r$ мы имеем $\lim\limits_{n \to \infty} \|\lambda^{-n} T^n\| = 0$, и поэтому, как и при доказательстве неравенства $r_\sigma(T) \leqslant \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$, мы приходим к неравенству $\lim\limits_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n} \leqslant r$. Это и показывает, что $r_\sigma(T) \leqslant r$.

3. Статистическая эргодическая теорема

Статистическая эргодическая теорема, о которой будет идти речь в этом параграфе, позволяет для частного класса непрерывных линейных операторов построить собственное подпространство, соответствующее собственному значению $\lambda = 1$ Мы рассмотрим здесь