Следствие. Для всякого ограниченного линейного оператора T, отображающего B-пространство X в себя, резольвентное множество $\rho(T)$ непусто.

Теорема 4. Для всякого ограниченного линейного оператора $T \in L(X, X)$ (где X — некоторое B-пространство) имеет место формула

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|. \tag{6}$$

Доказательство. По теореме 3 имеем $r_\sigma(T) \geqslant \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$. Поэтому остается лишь установить неравенство $r_\sigma(T) \leqslant \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$.

Функция $R(\lambda; T)$, согласно теореме 1, голоморфна по λ при $|\lambda| > \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$. Поэтому она обладает однозначно определенным разложением в ряд Лорана по положительным и неположительным степеням λ, сходящимся по норме операторов при $|\lambda| > \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$. По теореме 3 этот ряд Лорана должен совпадать с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} T^{n-1}$. Следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} \| \lambda^{-n} T^n \| = 0$ при $|\lambda| > \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$, и поэтому для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших значениях n выполняется неравенство $\|T^n\| \leqslant \leqslant \left(\varepsilon + \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|\right)^n$. Это показывает, что

$$r_\sigma(T) = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n} \leqslant \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Следствие. Если $|\lambda| < r_\sigma(T)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} T^{n-1}$ расходится.

Доказательство. Обозначим через r наименьшее неотрицательное число, такое, что при $|\lambda| > r$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} T^{n-1}$ сходится по норме операторов. Существование такого числа $r \geqslant 0$ доказывается так же, как в случае обычных числовых рядов по степеням λ^{-1}. Тогда при $|\lambda| > r$ мы имеем $\lim\limits_{n \to \infty} \| \lambda^{-n} T^n \| = 0$, и поэтому, как и при доказательстве неравенства $r_\sigma(T) \leqslant \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$, мы приходим к неравенству $\lim\limits_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n} \leqslant r$. Это и показывает, что $r_\sigma(T) \leqslant r$.

3. Статистическая эргодическая теорема

Статистическая эргодическая теорема, о которой будет идти речь в этом параграфе, позволяет для частного класса непрерывных линейных операторов построить собственное подпространство, соответствующее собственному значению $\lambda = 1$ Мы рассмотрим здесь статистическую эргодическую теорему и ее доказательство с точки зрения спектральной теории в формулировке, предложенной автором этой книги. Краткий исторический очерк развития эргодической теории в связи со статистической механикой будет приведен в гл. XIII.

Теорема 1. Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство и T — непрерывный линейный оператор, отображающий пространство X в себя. Допустим, что

> семейство операторов $\{T^n;\ n=1, 2, \ldots\}$ *равностепенно непрерывно* в том смысле, что для всякой непрерывной полунормы q на X существует такая непрерывная полунорма q' на X, что
> $$\sup_{n\geqslant 1} q(T^n x) \leqslant q'(x) \text{ для всех } x \in X. \tag{1}$$

Тогда замыкание $R(I-T)^a$ области значений $R(I-T)$ удовлетворяет условию

$$R(I-T)^a = \left\{ x \in X;\ \lim_{n\to\infty} T_n x = 0,\ T_n = n^{-1} \sum_{m=1}^{n} T^m \right\}, \tag{2}$$

откуда, в частности,

$$R(I-T)^a \cap N(I-T) = \{0\}. \tag{3}$$

Доказательство. Так как $T_n(I-T) = n^{-1}\left(T - T^{n+1}\right)$, из условия (1) следует, что если $w \in R(I-T)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} T_n w = 0$. Допустим теперь, что $z \in R(I-T)^a$. Тогда для всякой непрерывной полунормы q' на X и любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $w \in R(I-T)$, что $q'(z-w) < \varepsilon$. Поэтому если за q и q' принять полунормы, фигурирующие в условии (1), то $q(T_n(z-w)) \leqslant n^{-1} \sum\limits_{m=1}^{n} q(T^m(z-w)) \leqslant$ $\leqslant q'(z-w) < \varepsilon$. Следовательно, $q(T_n z) \leqslant q(T_n w) + q(T_n(z-w)) \leqslant$ $\leqslant q(T_n w) + \varepsilon$, и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} T_n z = 0$. Это показывает, что $R(I-T)^a \subseteq$ $\subseteq \left\{ x \in X;\ \lim\limits_{n\to\infty} T_n x = 0 \right\}$.

Обратно, допустим, что элемент $x \in X$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = 0$. Тогда для всякой непрерывной полунормы q на X и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n, что $q(x - (x - T_n x)) =$ $= q(T_n x) < \varepsilon$. Но

$$x - T_n x = n^{-1} \sum_{m=1}^{n} (I - T^m)\, x =$$
$$= n^{-1} \sum_{m=1}^{n} (I-T)\left(I + T + T^2 + \ldots + T^{m-1}\right) x,$$

поэтому $(x - T_n x) \in R(I - T)$. Значит, элемент x должен принадлежать замыканию $R(I-T)^a$.

Теорема 2 (статистическая эргодическая теорема). Пусть выполняется условие (1). Допустим, что для некоторого элемента $x \in X$ можно выбрать подпоследовательность $\{T_{n'}x\}$ последовательности $\{T_n x\}$, для которой существует слабый предел

$$w\text{-}\lim_{n'\to\infty} T_{n'}x = x_0 \in X. \tag{4}$$

Тогда $Tx_0 = x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = x_0$.

Доказательство. Так как $TT_n - T_n = n^{-1}(T^{n+1} - T)$, из (1) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}(TT_n x - T_n x) = 0$. Поэтому для любого элемента $f \in X'$ предел $\lim\limits_{n'\to\infty}\langle TT_{n'}x, f\rangle = \lim\limits_{n'\to\infty}\langle T_{n'}x, T'f\rangle$ существует и равен $\lim\limits_{n'\to\infty}\langle T_{n'}x, f\rangle = \langle x_0, f\rangle$. Следовательно, $\langle x_0, f\rangle = \langle Tx_0, f\rangle$. Поскольку функционал $f \in X'$ был выбран произвольно, последнее означает, что $Tx_0 = x_0$.

Из равенства $T^m x = T^m x_0 + T^m(x - x_0) = x_0 + T^m(x - x_0)$ мы выводим соотношение $T_n x = x_0 + T_n(x - x_0)$. Но $x - x_0 = w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}(x - T_{n'}x)$ и, как доказано выше, $(x - T_{n'}x) \in R(I - T)$. Поэтому, применяя теорему 11 из § 1 гл. V, мы видим, что $(x - x_0) \in R(I-T)^a$. Отсюда по теореме 1 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x - x_0) = 0$, и мы доказали, что $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = x_0$.

Следствие. Пусть выполняется условие (1) и ограниченные множества рассматриваемого пространства X слабо секвенциально компактны [1]. Тогда для любого $x \in X$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = x_0 \in X$, и оператор T_0, определенный равенством $T_0 x = x_0$, представляет собой непрерывный линейный оператор, такой, что

$$T_0 = T_0^2 = TT_0 = T_0 T, \tag{5}$$

$$R(T_0) = N(I - T), \tag{6}$$

$$N(T_0) = R(I-T)^a = R(I - T_0). \tag{7}$$

Кроме того, пространство X можно следующим образом представить в виде *прямой суммы* [2]:

$$X = R(I-T)^a \oplus N(I - T), \tag{8}$$

т. е. всякий элемент $x \in X$ единственным образом может быть записан в виде суммы элемента из $R(I-T)^a$ и элемента из $N(I-T)$.

---

[1] См. стр. 178. — *Прим. перев.*

[2] Запись $A = B \oplus C$ (*прямая сумма*), где A, B, C — подпространства некоторого линейного пространства X, в общем случае означает, что $A = \{x \in X;\ x = y + z,\ y \in B,\ x \in C$, представление $x = y + z$ единственно$\}$. — *Прим. перев.*

Доказательство. Очевидно, что T_0 — линейный оператор. Его непрерывность вытекает из того, что последовательность $\{T_n\}$, согласно условию (1), равностепенно непрерывна. Далее, поскольку $Tx_0 = x_0$, ясно, что $TT_0 = T_0$, откуда $T^nT_0 = T_0$, $T_nT_0 = T_0$ и, следовательно, $T_0^2 = T_0$. С другой стороны, $T_n - T_nT = n^{-1}(T - T^{n+1})$, и поэтому из условия (1) следует, что $T_0 = T_0T$. Свойство (6) доказывается следующим образом. Пусть $Tx = x$; тогда $T^nx = x$, $T_nx = x$, поэтому $T_0x = x$ и $x \in R(T_0)$. Обратно, если $x \in R(T_0)$, то из равенства $T_0^2 = T_0$ следует, что $T_0x = x$, а так как $TT_0 = T_0$, то $Tx = TT_0x = T_0x = x \in N(I - T)$. Таким образом, собственное подпространство оператора T, соответствующее собственному значению $\lambda = 1$, совпадает с $R(T_0)$. Тем самым свойство (6) доказано. Далее по теореме 1 $N(T_0) = R(I - T)^a$. Но из равенства $T_0^2 = T_0$ следует, что $R(I - T_0) \subseteq N(T_0)$, и если $x \in N(T_0)$, то $x = x - T_0x \in R(I - T_0)$. Поэтому $N(T_0) = R(I - T_0)$. Из условий (6) и (7) выводится разложение (8) и без труда устанавливается его единственность, так как $I = (I - T_0) + T_0$.

Замечание. Собственное подпространство $N(\lambda I - T)$ оператора T, соответствующее собственному значению λ, для которого $|\lambda| = 1$, можно рассматривать как область значений $R(T(\lambda))$, где оператор $T(\lambda)$ определен соотношением

$$T(\lambda)x = \lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda}T\right)^m x.$$

Статистическая эргодическая теорема фон Неймана. Пусть $(S, \mathfrak{B}, m)$ — пространство с мерой, и пусть P — взаимно однозначное отображение множества S на себя, *сохраняющее меру*, т. е. $P \cdot B \in \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $B \in \mathfrak{B}$ и $m(P \cdot B) = m(B)$.

Определим линейный оператор T, отображающий пространство $L^2(S, \mathfrak{B}, m)$ на себя, равенством

$$(Tx)(s) = x(Ps), \quad x \in L^2(S, \mathfrak{B}, m) \quad (s \in S). \tag{9}$$

Используя условие сохранения меры при преобразовании P, нетрудно убедиться в том, что T — унитарный оператор, и поэтому выполняется условие (1) равностепенной непрерывности, так как $\|T^n\| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Поскольку ограниченные множества гильбертова пространства $L^2(S, \mathfrak{B}, m)$ слабо секвенциально компактны, наши рассуждения приводят к *статистической эргодической теореме фон Неймана*: при указанных выше условиях для любого $x \in L^2(S, \mathfrak{B}, m)$ предел

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{m=1}^{n} T^m x = x_0 \in L^2(S, \mathfrak{B}, m) \tag{10}$$

существует и $Tx_0 = x_0$.

Замечание. Приведенные здесь теоремы 1 и 2 взяты из работы Иосида [3]. См. также Какутани [1] и Рисс [4]. Статистическая эргодическая теорема фон Неймана опубликована в работе фон Неймана [3].

4. Обобщение эргодических теорем Хилле о псевдорезольвентах

Хилле ввел понятие псевдорезольвенты, обобщающее понятие резольвенты. При доказательстве эргодических теорем для псевдорезольвент можно использовать ту же идею, что и при установлении эргодических теорем в предыдущем параграфе (см. Иосида [4], Като [1]). Эти эргодические теоремы можно рассматривать как обобщение абелевых [1]) эргодических теорем Хилле (см. Хилле и Филлипс [1]).

Мы начнем с определения псевдорезольвенты.

Определение. Рассмотрим алгебру [2]) $L(X, X)$ всех непрерывных линейных операторов, отображающих локально выпуклое комплексное линейное топологическое пространство X в себя. Всякая функция J_λ, заданная на некотором множестве $D(J)$ комплексной λ-плоскости, принимающая значения из $L(X, X)$ и удовлетворяющая условию

$$J_\lambda - J_\mu = (\mu - \lambda) J_\lambda J_\mu \quad \text{(резольвентное уравнение)}, \tag{1}$$

называется *псевдорезольвентой*.

Предложение. Все псевдорезольвенты J_λ, $\lambda \in D(J)$, имеют общее нуль-подпространство, которое мы обозначим через $N(J)$, и общую область значений $R(J)$. Аналогично все операторы $(I - \lambda J_\lambda)$, $\lambda \in D(J)$, имеют общее нуль-подпространство $N(I - J)$ и общую область значений $R(I - J)$. Кроме того, умножение псевдорезольвент коммутативно:

$$J_\lambda J_\mu = J_\mu J_\lambda \quad (\lambda, \mu \in D(J)). \tag{2}$$

Доказательство. Меняя ролями λ и μ в равенстве (1), мы находим, что

$$J_\mu - J_\lambda = (\lambda - \mu) J_\mu J_\lambda = -(\mu - \lambda) J_\mu J_\lambda,$$

откуда следует свойство (2). Первая часть утверждения следует из (1) и (2). Утверждения, относящиеся к оператору $(I - \lambda J_\lambda)$, вытекают

---

[1]) Теоремами *абелева* типа называют предложения, устанавливающие существование некоторого „сильного“ предела в предположении существования „слабого“ предела. Противоположные по характеру теоремы, устанавливающие существование „слабого“ предела в предположении, что этот предел может быть получен некоторым „более сильным“ способом, называются теоремами *тауберова* типа. — *Прим. перев.*

[2]) *Алгеброй* называется множество X, являющееся одновременно векторным пространством над некоторым скалярным полем K и кольцом и удовлетворяющее условию $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$ $(x, y \in X, \alpha \in K)$, где xy — операция умножения в кольце. — *Прим. перев.*