Замечание. Приведенные здесь теоремы 1 и 2 взяты из работы Иосида [3]. См. также Какутани [1] и Рисс [4]. Статистическая эргодическая теорема фон Неймана опубликована в работе фон Неймана [3].

4. *Обобщение эргодических теорем Хилле о псевдорезольвентах*

Хилле ввел понятие псевдорезольвенты, обобщающее понятие резольвенты. При доказательстве эргодических теорем для псевдорезольвент можно использовать ту же идею, что и при установлении эргодических теорем в предыдущем параграфе (см. Иосида [4], Като [1]). Эти эргодические теоремы можно рассматривать как обобщение абелевых [1]) эргодических теорем Хилле (см. Хилле и Филлипс [1]).

Мы начнем с определения псевдорезольвенты.

Определение. Рассмотрим алгебру [2]) $L(X, X)$ всех непрерывных линейных операторов, отображающих локально выпуклое комплексное линейное топологическое пространство X в себя. Всякая функция J_λ, заданная на некотором множестве $D(J)$ комплексной λ-плоскости, принимающая значения из $L(X, X)$ и удовлетворяющая условию

$$J_\lambda - J_\mu = (\mu - \lambda) J_\lambda J_\mu \quad \text{(резольвентное уравнение)}, \tag{1}$$

называется *псевдорезольвентой.*

Предложение. Все псевдорезольвенты J_λ, $\lambda \in D(J)$, имеют общее нуль-подпространство, которое мы обозначим через $N(J)$, и общую область значений $R(J)$. Аналогично все операторы $(I - \lambda J_\lambda)$, $\lambda \in D(J)$, имеют общее нуль-подпространство $N(I - J)$ и общую область значений $R(I - J)$. Кроме того, умножение псевдорезольвент коммутативно:

$$J_\lambda J_\mu = J_\mu J_\lambda \quad (\lambda, \ \mu \in D(J)). \tag{2}$$

Доказательство. Меняя ролями λ и μ в равенстве (1), мы находим, что

$$J_\mu - J_\lambda = (\lambda - \mu) J_\mu J_\lambda = -(\mu - \lambda) J_\mu J_\lambda,$$

откуда следует свойство (2). Первая часть утверждения следует из (1) и (2). Утверждения, относящиеся к оператору $(I - \lambda J_\lambda)$, вытекают

---

[1]) Теоремами *абелева* типа называют предложения, устанавливающие существование некоторого „сильного" предела в предположении существования „слабого" предела. Противоположные по характеру теоремы, устанавливающие существование „слабого" предела в предположении, что этот предел может быть получен некоторым „более сильным" способом, называются теоремами *тауберова* типа. — *Прим. перев.*

[2]) *Алгеброй* называется множество X, являющееся одновременно векторным пространством над некоторым скалярным полем K и кольцом и удовлетворяющее условию $\alpha(xy) = (\alpha x) y = x(\alpha y)$ $(x, y \in X, \ \alpha \in K)$, где xy — операция умножения в кольце. — *Прим. перев.*

из равенства

$$(I - \lambda J_\lambda) = (I - (\lambda - \mu) J_\lambda)(I - \mu J_\mu), \tag{1'}$$

которое представляет собой видоизменение условия (1).

Теорема 1. Псевдорезольвента J_λ служит резольвентой некоторого линейного оператора A в том и только в том случае, когда $N(J) = \{0\}$; при этом множество $R(J)$ совпадает с областью определения $D(A)$ оператора A.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Предположим, что $N(J) = \{0\}$. В этом случае обратный оператор J_λ^{-1} существует при всех $\lambda \in D(J)$. Тогда

$$\lambda I - J_\lambda^{-1} = \mu I - J_\mu^{-1} \quad (\lambda,\ \mu \in D(J)). \tag{3}$$

В самом деле, из (1) и (2) видно, что

$$J_\lambda J_\mu (\lambda I - J_\lambda^{-1} - \mu I + J_\mu^{-1}) = (\lambda - \mu) J_\lambda J_\mu - J_\lambda J_\mu (J_\lambda^{-1} - J_\mu^{-1}) =$$
$$= (\lambda - \mu) J_\lambda J_\mu - (J_\mu - J_\lambda) = 0.$$

Теперь можно положить

$$A = (\lambda I - J_\lambda^{-1}). \tag{4}$$

Тогда $J_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ для всех $\lambda \in D(J)$.

Лемма 1. Допустим, что существует последовательность $\{\lambda_n\}$ комплексных чисел из области $D(J)$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0 \text{ и семейство операторов } \{\lambda_n J_{\lambda_n}\} \text{ равностепенно непрерывно.} \tag{5}$$

Тогда

$$R(I - J)^a = \left\{ x \in X;\quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n J_{\lambda_n} x = 0 \right\} \tag{6}$$

и, следовательно,

$$N(I - J) \cap R(I - J)^a = \{0\}. \tag{7}$$

Доказательство. Из (1) следует, что

$$\lambda J_\lambda (I - \mu J_\mu) = (1 - \mu(\mu - \lambda)^{-1}) \lambda J_\lambda - \lambda(\lambda - \mu)^{-1} \mu J_\mu. \tag{8}$$

Отсюда видно, что если $x \in R(I - \mu J_\mu) = R(I - J)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n J_{\lambda_n} x = 0$, так как имеет место условие (5). Пусть $y \in R(I - J)^a$. Тогда для всякой непрерывной полунормы q на X и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $x \in R(I - J)$, что $q(y - x) < \varepsilon$. По условию (5) для всякой непрерывной полунормы q' на X можно указать такую непрерывную полунорму q на X, что выполняются неравенства

$$q'(\lambda_n J_{\lambda_n}(y - x)) \leqslant q(y - x) \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n J_{\lambda_n} y = 0$, поскольку $\lambda_n J_{\lambda_n} y = \lambda_n J_{\lambda_n} x + \lambda_n J_{\lambda_n}(y - x)$.

Обратно, допустим, что для некоторого элемента $x \in X$ выполняется условие $\lim_{n\to\infty} \lambda_n J_{\lambda_n} x = 0$. Тогда для всякой непрерывной полунормы q на X и любого $\varepsilon > 0$ существует такое λ_n, что $q\left(x - \left(x - \lambda_n J_{\lambda_n} x\right)\right) < \varepsilon$. Следовательно, элемент x должен принадлежать области $R\left(I - \lambda_n J_{\lambda_n}\right)^a = R(I - J)^a$. Лемма доказана.

Лемма 1′. Предположим, что существует такая числовая последовательность $\{\lambda_n\} \subseteq D(J)$, что

$$\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty \text{ и семейство операторов } \left\{\lambda_n J_{\lambda_n}\right\} \text{ равностепенно непрерывно.} \tag{5′}$$

Тогда

$$R(J)^a = \left\{x \in X;\ \lim_{n\to\infty} \lambda_n J_{\lambda_n} x = x\right\} \tag{6′}$$

и, следовательно,

$$N(J) \cap R(J)^a = \{0\}. \tag{7′}$$

Доказательство. Из условия (1) мы получаем соотношение

$$\lambda J_\lambda J_\mu = \frac{\mu}{\lambda} \lambda J_\lambda J_\mu - \frac{1}{\lambda} \lambda J_\lambda + J_\mu.$$

Поэтому если $x \in R(J_\mu) = R(J)$, то, согласно (5′), $\lim_{n\to\infty} \lambda_n J_{\lambda_n} x = x$. Пусть $y \in R(J)^a$. Тогда для любой непрерывной полунормы q на X и всякого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $x \in R(J)$, что $q(y - x) < \varepsilon$. Из условия (5′) следует, что для всякой непрерывной полунормы q' на X найдется такая непрерывная полунорма q на X, что

$$q'\left(\lambda_n J_{\lambda_n}(y - x)\right) \leqslant q(y - x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Следовательно, из условия (5′) и равенства

$$\lambda_n J_{\lambda_n} y - y = \left(\lambda_n J_{\lambda_n} x - x\right) + (x - y) + \lambda_n J_{\lambda_n}(y - x)$$

можно заключить, что $\lim_{n\to\infty} \lambda_n J_{\lambda_n} y = y$.

Обратно, пусть для элемента $x \in X$ выполняется условие $\lim_{n\to\infty} \lambda_n J_{\lambda_n} x = x$. Тогда для всякой непрерывной полунормы q на X и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое значение λ_n, что $q\left(x - \lambda_n J_{\lambda_n} x\right) < \varepsilon$. Поэтому элемент x должен принадлежать области $R\left(J_{\lambda_n}\right)^a = R(J)^a$.

Теорема 2. Предположим, что выполняется условие (5). Допустим, что для некоторого $x \in X$ можно выбрать такую подпоследовательность $\{n'\}$ последовательности $\{n\}$, что существует слабый предел

$$w\text{-}\lim_{n'\to\infty} \lambda_{n'} J_{\lambda_{n'}} x = x_h \in X. \tag{9}$$

Тогда $x_h = \lim_{n\to\infty} \lambda_n J_{\lambda_n} x$, $x_h \in N(I - J)$ и $x_p = (x - x_h) \in R(I - J)^a$.

Доказательство. Полагая в равенстве (1′) $\mu=\lambda_{n'}$ и $n'\to\infty$, мы видим, что ввиду условия (5) $(I-\lambda J_\lambda)x=(I-\lambda J_\lambda)(x-x_h)$, т. е. $(I-\lambda J_\lambda)x_h=0$. Поэтому $x_h\in N(I-J)$ и

$$\lambda_n J_{\lambda_n}x=x_h+\lambda_n J_{\lambda_n}(x-x_h). \tag{10}$$

Итак, остается лишь показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n J_{\lambda_n}(x-x_h)=0$, а для этого по лемме 1 достаточно проверить, что $(x-x_h)\in R(I-J)^a$. Но $\left(x-\lambda_n J_{\lambda_n}x\right)\in R(I-J)$, откуда, согласно теореме 11, гл. V, § 1, вытекает, что $(x-x_h)\in R(I-J)^a$.

Следствие 1. Допустим, что ограниченные множества в X слабо секвенциально компактны; пусть выполняется условие (5). Тогда

$$X=N(I-J)\oplus R(I-J)^a. \tag{11}$$

Доказательство. Для любого $x\in X$ положим $x_h=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n J_{\lambda_n}x$ и $x_p=(x-x_h)$. Тогда x_h и x_p служат однозначно определенными компонентами разложения x по формуле (11):

$$x=x_h+x_p,\quad x_h\in N(I-J),\quad x_p\in R(I-J)^a.$$

Теорема 2′. Пусть выполняется условие (5′). Допустим, что для некоторого элемента $x\in X$ можно выбрать подпоследовательность $\{n'\}$ последовательности $\{n\}$, такую, что существует слабый предел

$$w\text{-}\lim_{n'\to\infty}\lambda_{n'}J_{\lambda_{n'}}x=x_{h'}\in X. \tag{9′}$$

Тогда $x_{h'}=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n J_{\lambda_n}x$ и $x_{h'}\in R(J)^a$, $x_{p'}=(x-x_{h'})\in N(J)$.

Доказательство. Полагая в условии (8) $\mu=\lambda_{n'}$ и $n'\to\infty$, мы на основании (5′) заключаем, что $\lambda J_\lambda(x-x_{h'})=0$, а это означает, что $(x-x_{h'})\in N(J)$. Поэтому

$$\lambda_n J_{\lambda_n}x=\lambda_n J_{\lambda_n}x_{h'}. \tag{10′}$$

Таким образом, остается лишь показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n J_{\lambda_n}x_{h'}=x_{h'}$, а для этого, согласно лемме 1′, достаточно убедиться в том, что $x_{h'}\in R(J)^a$. Но $\lambda_{n'}J_{\lambda_{n'}}x_{h'}\in R(J)$, и поэтому, согласно теореме 11, гл. V, § 1, $x_{h'}\in R(J)^a$.

Следствие 1′. Пусть выполняется условие (5′), и ограниченные множества в X слабо секвенциально компактны. Тогда

$$X=N(J)\oplus R(J)^a. \tag{11′}$$

Доказательство. Для произвольного $x\in X$ компонентами разложения $x=x_{h'}+x_{p'}$ служат элементы $x_{h'}=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n J_{\lambda_n}x$ и $x_{p'}=(x-x_{h'})$ $(x_{h'}\in R(J)^a,\ x_{p'}\in N(J))$.

Замечание. Из полученных результатов вытекает такое следствие: в рефлексивном B-пространстве X псевдорезольвента J_λ, удовлетворяющая условию (5′), служит резольвентой некоторого замкнутого линейного оператора A с плотной областью определения тогда и только тогда, когда $R(J)^a = X$. Этот результат принадлежит Като [1]. Доказательство легко получить при помощи теоремы Эберлейна, согласно которой ограниченные множества B-пространства X слабо секвенциально компактны тогда и только тогда, когда оно рефлексивно.

5. Среднее значение почти-периодической функции

В качестве приложения статистической эргодической теоремы мы приведем доказательство существования среднего значения почти-периодической функции.

Определение 1. Множество G элементов $g, h, \ldots$ называется *группой*, если в G для любой пары элементов (g, h) определено произведение gh, удовлетворяющее следующим условиям:

$$gh \in G; \tag{1}$$

$$(gh)k = g(hk) \text{ (ассоциативность)}; \tag{2}$$

существует единственный элемент $e \in G$, такой, что $eg = ge = g$ для всех $g \in G$; элемент e называется *единицей* группы G; (3)

для всякого $g \in G$ существует единственный элемент $g^{-1} \in G$, такой, что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$; элемент g^{-1} называется *обратным* к g. (4)

Ясно, что элемент g служит обратным для g^{-1}, так что $(g^{-1})^{-1} = g$. Если для всех $g, h \in G$ выполняется условие $gh = hg$, то группа называется *коммутативной*, или *абелевой*.

Пример. Множество всех комплексных матриц порядка n, определители которых равны единице, является группой по отношению к операции умножения матриц. Это так называемая *комплексная унимодулярная группа* порядка n. Единицей в этой группе служит единичная матрица, а элементом, обратным к a, является обратная матрица a^{-1}. Аналогично определяется *вещественная унимодулярная группа*. При $n \geqslant 2$ эти группы некоммутативны.

Определение 2 (фон Нейман [4]). Рассмотрим некоторую абстрактную группу G. Заданная на G комплексная функция $f(g)$ называется *почти-периодической* [1]) на G, если выполняется следующее условие:

множество функций $\{f_s(g, h);\ s \in G\}$, где $f_s(g, h) = f(gsh)$, заданных на произведении $G \times G$, вполне ограничено в топологии равномерной сходимости на $G \times G$ (т. е. по метрике $d(f_1(g, h), f_2(g, h)) = \sup_{g, h \in G} |f_1 - f_2|$). (5)

[1]) Элементарное определение почти-периодической (по Бору) функции приводится в § 10 гл. XI. — *Прим. перев.*