ряющая условию (5′), служит резольвентой некоторого замкнутого линейного оператора A с плотной областью определения тогда и только тогда, когда $R(J)^a = X$. Этот результат принадлежит Като [1]. Доказательство легко получить при помощи теоремы Эберлейна, согласно которой ограниченные множества B-пространства X слабо секвенциально компактны тогда и только тогда, когда оно рефлексивно.

5. Среднее значение почти-периодической функции

В качестве приложения статистической эргодической теоремы мы приведем доказательство существования среднего значения почти-периодической функции.

Определение 1. Множество G элементов $g, h, \ldots$ называется *группой*, если в G для любой пары элементов (g, h) определено произведение gh, удовлетворяющее следующим условиям:

$$gh \in G; \tag{1}$$

$$(gh)k = g(hk) \text{ (ассоциативность)}; \tag{2}$$

существует единственный элемент $e \in G$, такой, что $eg = ge = g$ для всех $g \in G$; элемент e называется *единицей* группы G; (3)

для всякого $g \in G$ существует единственный элемент $g^{-1} \in G$, такой, что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$; элемент g^{-1} называется *обратным* к g. (4)

Ясно, что элемент g служит обратным для g^{-1}, так что $(g^{-1})^{-1} = g$. Если для всех $g, h \in G$ выполняется условие $gh = hg$, то группа называется *коммутативной*, или *абелевой*.

Пример. Множество всех комплексных матриц порядка n, определители которых равны единице, является группой по отношению к операции умножения матриц. Это так называемая *комплексная унимодулярная группа* порядка n. Единицей в этой группе служит единичная матрица, а элементом, обратным к a, является обратная матрица a^{-1}. Аналогично определяется *вещественная унимодулярная группа*. При $n \geqslant 2$ эти группы некоммутативны.

Определение 2 (фон Нейман [4]). Рассмотрим некоторую абстрактную группу G. Заданная на G комплексная функция $f(g)$ называется *почти-периодической* [1]) на G, если выполняется следующее условие:

множество функций $\{f_s(g, h);\ s \in G\}$, где $f_s(g, h) = f(gsh)$, заданных на произведении $G \times G$, вполне ограничено в топологии равномерной сходимости на $G \times G$ (т. е. по метрике $d(f_1(g, h), f_2(g, h)) = \sup\limits_{g, h \in G} |f_1 - f_2|$). (5)

[1]) Элементарное определение почти-периодической (по Бору) функции приводится в § 10 гл. XI. — *Прим. перев.*

Пример. Пусть G — множество R^1 всех вещественных чисел с групповой операцией, определенной как сложение; это так называемая *аддитивная группа вещественных чисел.* Функция $f(g)=e^{iag}$, где a—вещественное число и $i=\sqrt{-1}$, является почти-периодической на R^1. Это следует из равенства $f(gsh)=e^{iag}\cdot e^{ias}\cdot e^{iah}$ и того факта, что множество $\{e^{iat};\ t\in R^1\}$ вполне ограничено как множество комплексных чисел, равных по модулю единице.

Предложение 1. Пусть $f(g)$—почти-периодическая функция, определенная на группе G. Следуя А. Вейлю, определим функцию

$$\operatorname{dis}(s,\ u)=\sup_{g,\ h\in G}|f(gsh)-f(guh)| \qquad (s,\ u\in G). \tag{6}$$

Тогда

$$\operatorname{dis}(s,\ u)=\operatorname{dis}(asb,\ aub) \tag{7}$$

при любых $a,\ b\in G$.

Доказательство. Утверждение следует из определения (6) и свойств группы.

Следствие 1. Множество E всех элементов $s\in G$, удовлетворяющих условию $\operatorname{dis}(s,e)=0$, образует *инвариантную подгруппу*[1]) группы G, т. е. обладает следующими свойствами:

$$\text{если } e_1,\ e_2\in E, \text{ то } e_1e_2\in E \text{ и } ae_1a^{-1}\in E \text{ для любого элемента } a\in G. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{dis}(e_1,\ e)=0$ и $\operatorname{dis}(e_2,\ e)=0$. Тогда из условия (7) и неравенства треугольника (которое здесь, как нетрудно проверить, выполняется) получаем

$$\operatorname{dis}(e_1e_2,\ e)\leqslant\operatorname{dis}(e_1e_2,\ e_1e)+\operatorname{dis}(e_1e,\ e)=0+0=0,$$

т. е. $\operatorname{dis}(e_1e_2,\ e)=0$. Аналогично если $\operatorname{dis}(e_1,\ e)=0$, то

$$\operatorname{dis}(ae_1a^{-1},\ e)=\operatorname{dis}(ae_1a^{-1},\ aea^{-1})=0.$$

Следствие 2. Условимся записью $s\equiv u(\operatorname{mod}E)$ обозначать тот факт, что $su^{-1}\in E$ $(s,\ u\in G)$. Тогда условие $s\equiv u(\operatorname{mod}E)$ эквивалентно равенству $\operatorname{dis}(s,\ u)=0$.

Доказательство. Утверждение следует из равенств

$$\operatorname{dis}(su^{-1},\ e)=\operatorname{dis}(s,\ eu)=\operatorname{dis}(s,\ u).$$

Следствие 3. Отношение $s\equiv u(\operatorname{mod}E)$ является отношением эквивалентности, т. е. обладает следующими свойствами:

$$s\equiv s(\operatorname{mod}E), \tag{9}$$

$$\text{если } s\equiv u(\operatorname{mod}E), \text{ то } u\equiv s(\operatorname{mod}E), \tag{10}$$

$$\text{если } s_1\equiv s_2(\operatorname{mod}E) \text{ и } s_2\equiv s_3(\operatorname{mod}E), \text{ то } s_1\equiv s_3(\operatorname{mod}E). \tag{11}$$

---

[1]) Эту подгруппу называют также *нормальным делителем* группы G. —*Прим. перев.*

Доказательство. Это вытекает из неравенства треугольника и следствия 2.

Теперь мы можем определить *факторгруппу по подгруппе* E, или *группу классов вычетов* по модулю E, которую мы обозначим через G/E, аналогично тому, как определялось факторпространство линейного пространства. Обозначим через ξ_x множество всех элементов группы G, эквивалентных относительно подгруппы E фиксированному элементу $x \in G$, т. е. *класс вычетов* $(\bmod E)$, содержащий элемент $x \in G$. Совокупность всех классов вычетов ξ_x с операцией умножения

$$\xi_x \xi_y = \xi_{xy} \tag{12}$$

образует группу G/E. Для обоснования корректности определения (12) произведения $\xi_x \xi_y$ нужно показать, что

$$\text{если } x_1 \equiv x_2 (\bmod E), \quad y_1 \equiv y_2 (\bmod E), \quad \text{то} \quad x_1 y_1 \equiv x_2 y_2 (\bmod E). \tag{13}$$

Это вытекает из свойства (7) и следствия 2:

$$\operatorname{dis}(x_1 y_1, x_2 y_2) \leqslant \operatorname{dis}(x_1 y_1, x_2 y_1) + \operatorname{dis}(x_2 y_1, x_2 y_2) =$$
$$= \operatorname{dis}(x_1, x_2) + \operatorname{dis}(y_1, y_2) = 0 + 0 = 0, \text{ т. е. } \operatorname{dis}(x_1 y_1, x_2 y_2) = 0.$$

Поскольку функция $f(x)$, фигурирующая в определении (6), принимает одно и то же постоянное значение на всех элементах класса ξ_x, мы можем рассматривать $f(x)$ как функцию $F(\xi_x)$, заданную на факторгруппе G/E.

Следствие 4. Факторгруппа G/E с функцией расстояния

$$d(\xi_x, \xi_y) = \operatorname{dis}(\xi_x, \xi_y) = \operatorname{dis}(x, y) \tag{14}$$

образует метрическое пространство.

Доказательство. Если $x \equiv x_1 (\bmod E)$ и $y = y_1 (\bmod E)$, то

$$\operatorname{dis}(x, y) \leqslant \operatorname{dis}(x, x_1) + \operatorname{dis}(x_1, y_1) + \operatorname{dis}(y_1, y) = 0 + \operatorname{dis}(x_1, y_1) + 0.$$

Аналогично $\operatorname{dis}(x_1, y_1) \leqslant \operatorname{dis}(x, y)$, откуда $\operatorname{dis}(x, y) = \operatorname{dis}(x_1, y_1)$. Это показывает, что функция расстояния (14) в пространстве G/E определена корректно.

Следствие 5. Группа G/E является *топологической группой* по отношению к метрике $\operatorname{dis}(\xi_x, \xi_y)$, т. е. операция умножения $\xi_x \xi_y$ непрерывна как отображение пространства $(G/E) \times (G/E)$ на G/E и операция ξ_x^{-1} непрерывна как отображение группы G/E на себя[1]).

[1]) Группа H, являющаяся в то же время топологическим пространством X, называется *топологической группой*, если отображение $X \times X \ni \{x, y\} \to xy^{-1} \in X$ непрерывно. В следствии 5 используется, очевидно, эквивалентное определение. — *Прим. перев.*

Доказательство. Из (7) следует, что

$$\operatorname{dis}(su, s'u') \leqslant \operatorname{dis}(su, s'u) + \operatorname{dis}(s'u, s'u') = \operatorname{dis}(s, s') + \operatorname{dis}(u, u')$$

и

$$\operatorname{dis}(s^{-1}, u^{-1}) = \operatorname{dis}(ss^{-1}u, su^{-1}u) = \operatorname{dis}(u, s) = \operatorname{dis}(s, u).$$

Приведенные рассуждения позволяют установить следующую теорему.

Теорема 1 (А. Вейль). Топологическая группа G/E с метрикой (14) представляет собой вполне ограниченное метрическое пространство, и функция $f(x)$ порождает функцию $F(\xi_x)(=f(x))$, которая равномерно непрерывна на группе G/E.

Доказательство. Равномерная непрерывность функции $F(\xi_x)$ следует из неравенства

$$|F(\xi_x) - F(\xi_y)| = |f(x) - f(y)| \leqslant \operatorname{dis}(x, y) = \operatorname{dis}(\xi_x, \xi_y).$$

Тот факт, что пространство G/E вполне ограничено, вытекает из почти-периодичности функции $f(x)$ и свойств (7) и (14).

Таким образом, при помощи этой теоремы теория почти-периодических функций сводится к изучению равномерно непрерывных функций $f(g)$, заданных на вполне ограниченной топологической группе G, метризованной с помощью функции расстояния $\operatorname{dis}(g_1, g_2)$, удовлетворяющей условию (7). Это обстоятельство мы и используем для доказательства существования среднего значения почти-периодической функции.

Поскольку пространство G вполне ограничено, для всякого $\varepsilon > 0$ существует конечная система точек $g_1, g_2, \ldots, g_n$, такая, что $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{dis}(g, g_i) \leqslant \varepsilon$ для всех $g \in G$. Придавая ε значения $1, 2^{-1}, 3^{-1}, \ldots$ и объединяя соответствующие конечные системы точек $g_1, \ldots, g_n$, мы получаем счетное множество $\{g_i\}$ точек G, плотное в G. Выберем произвольную последовательность положительных чисел α_j, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j = 1$. Обозначим через $C(G)$ совокупность всех равномерно непрерывных комплексных функций $h(g)$, заданных на G. Множество $C(G)$ с операциями сложения функций, умножения функций на комплексные числа и с нормой $\|h\| = \sup\limits_{g \in G} |h(g)|$ образует B-пространство. Определим оператор T, отображающий $C(G)$ в себя, формулой

$$(T \cdot h)(g) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j h(g_j g). \tag{15}$$

По условию равномерной непрерывности функции $h(g)$ на G для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $\operatorname{dis}(g, g') \leqslant \delta$ следует неравенство $|h(g) - h(g')| \leqslant \varepsilon$. Отсюда, согласно (7), мы получаем неравенство $|h(g_jg)-h(g_jg')|\leqslant\varepsilon$ $(j=1, 2, \ldots)$ при $\operatorname{dis}(g, g')\leqslant\delta$. Следовательно, T — ограниченный линейный оператор, отображающий пространство $C(G)$ в себя, так как $\alpha_j>0$ и $\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j=1$. Аналогичные рассуждения показывают, что функции $h_n(g)$, определяемые равенствами

$$h_n(g)=n^{-1}\sum_{m=1}^{n}(T^m h)(g)\qquad(n=1, 2, \ldots)\tag{16}$$

(их можно представить в форме $h_n(g)=\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j h(g'_jg)$, $\beta_j>0$, $\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j=1$), равномерно ограничены и равностепенно непрерывны (относительно n). Поэтому, согласно теореме Асколи — Арцела, последовательность $\{h_n(g)\}$ содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся на множестве G.

Таким образом, согласно статистической эргодической теореме, существует такая функция $h^*(g)\in C(G)$, что

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{g\in G}|h_n(g)-h^*(g)|=0\quad\text{и}\quad Th^*=h^*.\tag{17}$$

Предложение 2. Полученная выше функция $h^*(g)$ тождественно равна постоянной.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать функции $h(g)$ и $h^*(g)$ вещественными. Допустим, что существуют точка $g_0\in G$ и положительная постоянная δ, такие, что

$$h^*(g_0)\leqslant\beta-2\delta,\quad\text{где}\quad\beta=\sup_{g\in G}h^*(g).$$

Функция $h^*(g)$ равномерно непрерывна, поэтому найдется такое положительное число ε, что из условия $\operatorname{dis}(g', g'')\leqslant\varepsilon$ будет вытекать неравенство $|h^*(g')-h^*(g'')|\leqslant\delta$. В частности, $h^*(g'')\leqslant\beta-\delta$ при $\operatorname{dis}(g_0, g'')\leqslant\varepsilon$. Так как построенная ранее последовательность $\{g_j\}$ плотна в G, для всякого $\varepsilon>0$ существует такой индекс n, что для любой точки $g\in G$ справедливо неравенство $\min_{1\leqslant j\leqslant n}\operatorname{dis}(g, g_j)\leqslant\varepsilon$. Следовательно, согласно (7), для любой точки $g\in G$

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\operatorname{dis}(g_0, g_jg)\leqslant\varepsilon.$$

Допустим, что этот минимум достигается при $j=j_0$. Тогда

$$h^*(g)=(Th^*)(g)=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j h^*(g_jg)\leqslant$$
$$\leqslant\alpha_{j_0}(\beta-\delta)+(1-\alpha_{j_0})\beta=\beta-\alpha_{j_0}\delta<\beta$$

вопреки тому, что точка g выбиралась совершенно произвольно. Поэтому функция $h^*(g)$ тождественно равна постоянной.

Определение 3. Постоянное значение $h^*(g)$ мы назовем *левым средним значением* функции $h(g)$ и обозначим его через $M_g^l(h(g))$:

$$M_g^l(h(g)) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=1}^{n} (T^m h)(g). \tag{18}$$

Теорема 2 (фон Нейман). Среднее значение M_g^l обладает следующими свойствами:

1° $M_g^l(\alpha h(g)) = \alpha M_g^l(h(g))$;

2° $M_g^l(h_1(g) + h_2(g)) = M_g^l(h_1(g)) + M_g^l h_2(g))$;

3° $M_g^l(1) = 1$;

4° если $h(g) \geqslant 0$ на множестве G, то $M_g^l(h(g)) \geqslant 0$; если, кроме того, $h(g) \not\equiv 0$, то $M_g^l(h(g)) > 0$;

5° $|M_g^l(h(g))| \leqslant M_g^l(|h(g)|)$;

6° $M_g^l(\overline{h(g)}) = \overline{M_g^l(h(g))}$;

7° $M_g^l(h(ga)) = M_g^l(h(g))$;

8° $M_g^l(h(ag)) = M_g^l(h(g))$;

9° $M_g^l(h(g^{-1})) = M_g^l(h(g))$.

Доказательство. Свойства 1° — 3° и первая часть 4°, а также 5° и 6° следуют непосредственно из определения (18); свойство 7° легко доказывается с помощью предложения 2. Докажем равенство 8°.

Определим линейный оператор T' формулой

$$(T'h)(g) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j h(gg_j).$$

Это позволяет по аналогии с $M_g^l(h(g))$ определить *правое среднее значение* $M_g^r(h(g))$ функции $h(g)$. Функционал $M_g^r(h(g))$ удовлетворяет условиям 1° — 3°, первой части 4°, условиям 5°, 6° и 8°. Остается лишь показать, что правое и левое средние значения совпадают. По определению левого среднего значения для всякого $\varepsilon > 0$ существуют последовательность элементов $\{k_j\} \subseteq G$ и последовательность положительных чисел β_j, удовлетворяющих условию $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j = 1$, такие, что

$$\sup_{g\in G} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j h(k_j g) - M_g^l(h(g)) \right| \leqslant \varepsilon. \tag{19}$$

Аналогично существуют последовательность элементов $\{s_j\} \subseteq G$ и последовательность положительных чисел $\gamma_j \left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j = 1 \right)$, такие, что

$$\sup_{g \in G} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j h(gs_j) - M_g^r(h(g)) \right| \leqslant \varepsilon. \tag{20}$$

Из условия 7° и неравенства (19) мы получаем

$$\sup_{g \in G} \left| \sum_{i, j} \gamma_i \beta_j h(k_j g s_i) - M_g^l(h(g)) \right| \leqslant \varepsilon;$$

точно так же из (20) и условия 8° находим

$$\sup_{g \in G} \left| \sum_{i, j} \gamma_i \beta_j h(k_j g s_i) - M_g^r(h(g)) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Из этих неравенств видно, что $M_g^l(h(g)) = M_g^r(h(g))$.

Заметим, что линейный функционал $M_g(h(g))$, заданный на $C(G)$, однозначно определяется условиями 1° — 3°, первой частью 4° и 5° — 7° (или 8°). В самом деле, согласно (20),

$$M_g^r(h(g)) - \varepsilon \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i h(gs_i) \leqslant M_g^r(h(g)) + \varepsilon$$

для вещественных функций $h(g)$.

Поэтому для вещественной функции $h(g)$ значение функционала $M_g(h(g))$ должно совпадать с правым средним $M_g^r(h(g))$, а следовательно, и с левым средним $M_g^l(h(g))$. Поэтому $M_g = M_g^r = M_g^l$. Так как $M_g = M_g^r$, то для M_g справедливо утверждение 8°. Кроме того, линейный функционал $M_g^l(h(g^{-1}))$ удовлетворяет условиям 1°—3°, первой части 4°, 5°, 6° и 8°, поэтому $M_g^l(h(g^{-1})) = M_g^r(h(g)) = M_g^l(h(g))$, т. е. имеет место равенство 9°.

Наконец, докажем вторую часть утверждения 4°. Допустим, что $h(g_0) > 0$. Так как пространство G вполне ограничено, для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная система элементов $s_1, s_2, \ldots, s_n$, такая, что

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \sup_{g \in G} |h(gs_i) - h(gs)| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad s \in G.$$

Это следует из равномерной непрерывности функции $h(g)$ и равенства $\operatorname{dis}(gs_i, gs) = \operatorname{dis}(s_i, s)$. Следовательно, при $\varepsilon = h(g_0)/2$ для всякого $s \in G$ найдется такой индекс i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, что

$$h(g_0 s_i^{-1} s) \geqslant h(g_0)/2.$$

Отсюда, поскольку функция $h(g)$ неотрицательна, мы получаем

$$\sum_{i=1}^{n} h\left(g_0 s_i^{-1} s\right) \geqslant h\left(g_0\right)/2 > 0 \quad \text{для всех} \quad s \in G.$$

Взяв правые средние значения от обеих частей этого неравенства, мы приходим к неравенству

$$M_g^r\left(\sum_{i=1}^{r} h\left(g_0 s_i^{-1} s\right)\right) = n M_s^r(h(s)) \geqslant h(g_0)/2 > 0,$$

которое и доказывает вторую часть утверждения 4°.

Замечания. Идея введения метрики (14) восходит к работе А. Вейля [1]. Приложение статистической эргодической теоремы к доказательству существования среднего значения почти-периодической функции принадлежит автору настоящей книги. См. также Маак [1] [1]).

6. Резольвента сопряженного оператора

Лемма 1. Пусть X и Y — комплексные B-пространства и T — линейный оператор, такой, что $D(T)^a = X$ и $R(T) \subseteq Y$. Тогда оператор $(T')^{-1}$ существует в том и только в том случае, когда $R(T)^a = Y$.

Доказательство. Если $T' y_0^* = 0$, то

$$\langle x, T' y_0^* \rangle = \langle Tx, y_0^* \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in D(T),$$

откуда $y_0^*(R(T)^a) = 0$. Значит, из условия $R(T)^a = Y$ следует, что $y_0^* = 0$, и поэтому оператор T' обладает обратным оператором. С другой стороны, если $y_0 \notin R(T)^a$, то по теореме Хана — Банаха существует такой линейный функционал $y_0^* \in Y'$, что $y_0^*(y_0) = 1$ и $y_0^*(R(T)^a) = 0$. Следовательно, $\langle Tx, y_0^* \rangle = 0$ для всех $x \in D(T)$, и поэтому $y_0^* \in D(T')$ и $T' y_0^* = 0$, в то время как $y_0^*(y_0) \neq 0$, т. е. $y_0^* \neq 0$. Таким образом, условие $R(T)^a \neq Y$ приводит к выводу, что оператор T' не имеет обратного.

Теорема 1 (Филлипс [2]). Пусть линейный оператор T имеет обратный оператор и $D(T)^a = X$, $R(T)^a = Y$, где X и Y — два B-пространства. Тогда

$$(T')^{-1} = (T^{-1})'. \tag{1}$$

---

[1]) По элементарной теории почти-периодических функций см. также Б. М. Левитан [1*]. — *Прим. перев.*