Отсюда, поскольку функция $h(g)$ неотрицательна, мы получаем

$$\sum_{i=1}^{n} h\left(g_0 s_i^{-1} s\right) \geqslant h\left(g_0\right)/2 > 0 \quad \text{для всех} \quad s \in G.$$

Взяв правые средние значения от обеих частей этого неравенства, мы приходим к неравенству

$$M_g^r\left(\sum_{i=1}^{r} h\left(g_0 s_i^{-1} s\right)\right) = n M_s^r(h(s)) \geqslant h(g_0)/2 > 0,$$

которое и доказывает вторую часть утверждения 4°.

Замечания. Идея введения метрики (14) восходит к работе А. Вейля [1]. Приложение статистической эргодической теоремы к доказательству существования среднего значения почти-периодической функции принадлежит автору настоящей книги. См. также Маак [1] [1]).

6. Резольвента сопряженного оператора

Лемма 1. Пусть X и Y — комплексные B-пространства и T — линейный оператор, такой, что $D(T)^a = X$ и $R(T) \subseteq Y$. Тогда оператор $(T')^{-1}$ существует в том и только в том случае, когда $R(T)^a = Y$.

Доказательство. Если $T' y_0^* = 0$, то

$$\langle x, T' y_0^* \rangle = \langle Tx, y_0^* \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in D(T),$$

откуда $y_0^*(R(T)^a) = 0$. Значит, из условия $R(T)^a = Y$ следует, что $y_0^* = 0$, и поэтому оператор T' обладает обратным оператором. С другой стороны, если $y_0 \notin R(T)^a$, то по теореме Хана — Банаха существует такой линейный функционал $y_0^* \in Y'$, что $y_0^*(y_0) = 1$ и $y_0^*(R(T)^a) = 0$. Следовательно, $\langle Tx, y_0^* \rangle = 0$ для всех $x \in D(T)$, и поэтому $y_0^* \in D(T')$ и $T' y_0^* = 0$, в то время как $y_0^*(y_0) \neq 0$, т. е. $y_0^* \neq 0$. Таким образом, условие $R(T)^a \neq Y$ приводит к выводу, что оператор T' не имеет обратного.

Теорема 1 (Филлипс [2]). Пусть линейный оператор T имеет обратный оператор и $D(T)^a = X$, $R(T)^a = Y$, где X и Y — два B-пространства. Тогда

$$(T')^{-1} = \left(T^{-1}\right)'. \tag{1}$$

---

[1]) По элементарной теории почти-периодических функций см. также Б. М. Левитан [1*]. — *Прим. перев.*

При этом оператор T^{-1}, определенный на пространстве Y, ограничен тогда и только тогда, когда оператор T замкнут и оператор $(T')^{-1}$ ограничен на пространстве X'_s.

Доказательство. Оператор $(T^{-1})'$ существует, так как множество $D(T^{-1}) = R(T)$ плотно в Y. Существование оператора $(T')^{-1}$ следует из леммы 1. Докажем равенство (1). Если $y \in R(T)$ и $y^* \in D(T')$, то

$$\langle y, y^* \rangle = \langle TT^{-1}y, y^* \rangle = \langle T^{-1}y, T'y^* \rangle.$$

Это означает, что $R(T') \subseteq D((T^{-1})')$ и $(T^{-1})'(T'y^*) = y^*$ для всех $y^* \in D(T')$. Таким образом, $(T^{-1})'$ служит расширением оператора $(T')^{-1}$. Далее, если $x \in D(T)$, то

$$\langle x, x^* \rangle = \langle T^{-1}Tx, x^* \rangle = \langle Tx, (T^{-1})'x^* \rangle \quad \text{для всех} \quad x^* \in D((T^{-1})').$$

Поэтому $R((T^{-1})') \subseteq D(T')$ и $T'(T^{-1})'x^* = x^*$ для всех $x^* \in D((T^{-1})')$. Следовательно, $(T^{-1})'$ — сужение оператора $(T')^{-1}$. Отсюда вытекает справедливость равенства (1).

Если, кроме того, T^{-1} — ограниченный оператор на Y, то и оператор $(T^{-1})'$ ограничен. Очевидно также, что при этих условиях оператор T замкнут. Обратно, если оператор $(T')^{-1}$ ограничен на пространстве X'_s, а оператор T замкнут, то для всех $x \in R(T)$ и $x^* \in X'$, согласно (1), справедлива оценка

$$|\langle T^{-1}x, x^* \rangle| = |\langle x, (T^{-1})'x^* \rangle| = |\langle x, (T')^{-1} x^* \rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \|(T')^{-1}\| \cdot \|x^*\| \cdot \|x\|.$$

Отсюда, поскольку оператор T^{-1} при указанных условиях замкнут и $R(T)^a = Y$, оператор T^{-1} должен быть ограниченным.

Лемма 2. Пусть T — линейный оператор, такой, что $D(T)^a = X$ и $R(T) \subseteq Y$, где X и Y — два B-пространства. Если множество $R(T')$ слабо* плотно в X', то оператор T имеет обратный.

Доказательство. Допустим, что существует элемент $x_0 \neq 0$, для которого $Tx_0 = 0$. Тогда

$$\langle x_0, T'y^* \rangle = \langle Tx_0, y^* \rangle = 0 \text{ для всех } y^* \in D(T').$$

Это показывает, что слабое* замыкание множества $R(T')$ является собственным подпространством в X', вопреки условию теоремы. Поэтому обратный оператор T^{-1} существует.

Теорема 2 (Филлипс [2]). Пусть X — комплексное B-пространство и T — замкнутый линейный оператор, такой, что $D(T)^a = X$ и $R(T) \subseteq X$. Тогда

$$\rho(T) = \rho(T') \text{ и } R(\lambda; T)' = R(\lambda; T') \text{ для всех } \lambda \in \rho(T). \qquad (2)$$

Доказательство. Если $\lambda \in \rho(T)$, то по теореме 1 $\lambda \in \rho(T')$ и $R(\lambda;\ T)' = R(\lambda;\ T')$. Если $\lambda \in \rho(T')$, то по лемме 2 оператор $(\lambda I - T)$ имеет обратный $(\lambda I - T)^{-1}$, и оба эти оператора замкнуты. Из леммы 1 следует, что множество $D\left((\lambda I - T)^{-1}\right) = R(\lambda I - T)$ сильно плотно в Y. Поэтому, согласно теореме 1, $\lambda \in \rho(T)$. Теорема доказана.

7. *Операторное исчисление*

Рассмотрим ограниченный линейный оператор $T \in L(X,\ X)$, где X — комплексное B-пространство. Мы определим функцию $f(T)$ от оператора T формулой, аналогичной интегральной формуле Коши:

$$f(T) = (2\pi i)^{-1} \int_C f(\lambda) R(\lambda;\ T)\, d\lambda.$$

Для этого обозначим через $F(T)$ совокупность всех комплексных функций $f(\lambda)$, голоморфных в некоторой окрестности спектра $\sigma(T)$ оператора T. Эти окрестности не обязательно связны и могут зависеть от $f(\lambda)$. Пусть $f \in F(T)$, и пусть открытое множество $U \supseteq \sigma(T)$ комплексной плоскости содержится в области голоморфности функции f. Допустим также, что граница Γ этого множества состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, ориентированных в положительном направлении. Тогда ограниченный линейный оператор $f(T)$ определяется формулой

$$f(T) = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma f(\lambda) R(\lambda;\ T)\, d\lambda\ [1]. \tag{1}$$

Согласно интегральной теореме Коши, значение $f(T)$ зависит только от функции f и оператора T и не зависит от выбора области U.

Следующая теорема служит основой *операторного исчисления.*

Теорема (Данфорд). Если функции f и g принадлежат множеству $F(T)$ и α, β — произвольные комплексные числа, то справедливы следующие утверждения:

$$\alpha f + \beta g \in F(T) \text{ и } \alpha f(T) + \beta g(T) = (\alpha f + \beta g)(T); \tag{2}$$

$$f \cdot g \in F(T) \text{ и } f(T) \cdot g(T) = (f \cdot g)(T); \tag{3}$$

если разложение Тейлора $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n$ функции f сходится в окрестности U спектра $\sigma(T)$, то $f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n T^n$ (сходимость понимается в смысле топологии, определяемой нормой оператора); (4)

[1] Автор называет правую часть (1) *интегралом Данфорда.* — *Прим. перев.*