Доказательство. Если $\lambda \in \rho(T)$, то по теореме 1 $\lambda \in \rho(T')$ и $R(\lambda;\ T)' = R(\lambda;\ T')$. Если $\lambda \in \rho(T')$, то по лемме 2 оператор $(\lambda I - T)$ имеет обратный $(\lambda I - T)^{-1}$, и оба эти оператора замкнуты. Из леммы 1 следует, что множество $D\big((\lambda I - T)^{-1}\big) = R(\lambda I - T)$ сильно плотно в Y. Поэтому, согласно теореме 1, $\lambda \in \rho(T)$. Теорема доказана.

7. *Операторное исчисление*

Рассмотрим ограниченный линейный оператор $T \in L(X,\ X)$, где X — комплексное B-пространство. Мы определим функцию $f(T)$ от оператора T формулой, аналогичной интегральной формуле Коши:

$$f(T) = (2\pi i)^{-1} \int_C f(\lambda) R(\lambda;\ T)\, d\lambda.$$

Для этого обозначим через $F(T)$ совокупность всех комплексных функций $f(\lambda)$, голоморфных в некоторой окрестности спектра $\sigma(T)$ оператора T. Эти окрестности не обязательно связны и могут зависеть от $f(\lambda)$. Пусть $f \in F(T)$, и пусть открытое множество $U \supseteq \sigma(T)$ комплексной плоскости содержится в области голоморфности функции f. Допустим также, что граница Γ этого множества состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, ориентированных в положительном направлении. Тогда ограниченный линейный оператор $f(T)$ определяется формулой

$$f(T) = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma f(\lambda) R(\lambda;\ T)\, d\lambda\ ^{1)}. \tag{1}$$

Согласно интегральной теореме Коши, значение $f(T)$ зависит только от функции f и оператора T и не зависит от выбора области U.

Следующая теорема служит основой *операторного исчисления.*

Теорема (Данфорд). Если функции f и g принадлежат множеству $F(T)$ и α, β — произвольные комплексные числа, то справедливы следующие утверждения:

$$\alpha f + \beta g \in F(T) \ \text{и}\ \alpha f(T) + \beta g(T) = (\alpha f + \beta g)(T); \tag{2}$$

$$f \cdot g \in F(T) \ \text{и}\ f(T) \cdot g(T) = (f \cdot g)(T); \tag{3}$$

если разложение Тейлора $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n$ функции f сходится в окрестности U спектра $\sigma(T)$, то $f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n T^n$ (сходимость понимается в смысле топологии, определяемой нормой оператора); (4)

---

[1]) Автор называет правую часть (1) *интегралом Данфорда.* — *Прим. перев.*

пусть функции $f_n \in F(T)$ $(n=1, 2, \ldots)$ голоморфны в некоторой фиксированной окрестности U спектра $\sigma(T)$; если последовательность функций $f_n(\lambda)$ равномерно сходится в области U к функции $f(\lambda)$, то последовательность $f_n(T)$ сходится к $f(T)$ в топологии, определяемой нормой оператора; (5)

если $f \in F(T)$, то $f \in F(T')$ и $f(T') = f(T)'$. (6)

Доказательство. Утверждение (2) очевидно.

Доказательство утверждения (3). Пусть U_1 и U_2 — открытые окрестности спектра $\sigma(T)$, границы Γ_1 и Γ_2 которых состоят из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, и пусть $U_1 + \Gamma_1 \subsetneqq U_2$, а множество $U_2 + \Gamma_2$ содержится в области голоморфности функций f и g. Используя резольвентное уравнение и интегральную формулу Коши, мы получаем

$$f(T)g(T) = -(4\pi^2)^{-1} \int_{\Gamma_1} f(\lambda) R(\lambda; T)\, d\lambda \cdot \int_{\Gamma_2} g(\mu) R(\mu; T)\, d\mu =$$

$$= -(4\pi^2)^{-1} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} f(\lambda) g(\mu) (\mu - \lambda)^{-1} (R(\lambda; T) - R(\mu; T))\, d\lambda\, d\mu =$$

$$= (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_1} f(\lambda) R(\lambda; T) \left\{ (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_2} (\mu - \lambda)^{-1} g(\mu)\, d\mu \right\} d\lambda -$$

$$- (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_2} g(\mu) R(\mu; T) \left\{ (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_1} (\mu - \lambda)^{-1} f(\lambda)\, d\lambda \right\} d\mu =$$

$$= (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_1} f(\lambda) g(\lambda) R(\lambda; T)\, d\lambda = (f \cdot g)(T).$$

Доказательство утверждения (4). По предположению область U содержит внутри некоторый круг вида $\{\lambda;\ |\lambda| \leqslant r_\sigma(T) + \varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$, где $r_\sigma(T)$ — спектральный радиус оператора T (теорема 4, гл. VIII, § 2). Поэтому степенной ряд $f(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n$ равномерно сходится в круге $C = \{\lambda;\ |\lambda| \leqslant r_\sigma(T) + \varepsilon\}$ при некотором $\varepsilon > 0$. Отсюда, используя разложение резольвенты в ряд Лорана $R(\lambda; T) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} T^{n-1}$ (гл. VIII, § 2, (5)) и интегральную формулу Коши, мы выводим равенство

$$f(T)=(2\pi i)^{-1}\int\limits_{\Gamma_C}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\lambda^k\right)R(\lambda;\ T)\,d\lambda=$$

$$=(2\pi i)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\int\limits_{\Gamma_C}\lambda^kR(\lambda;\ T)\,d\lambda=$$

$$=(2\pi i)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\Gamma_C}\lambda^{k-n}T^{n-1}\,d\lambda=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_kT^k,$$

где Γ_C — граница круга C, что и требовалось доказать.

Утверждение (5) выводится из (1), а (6) доказывается с помощью (1) и формулы (2) предыдущего параграфа.

Следствие 1 (теорема об отображении спектра). Если функция f принадлежит множеству $F(T)$, то $f(\sigma(T))=\sigma(f(T))$.

Доказательство. Пусть $\lambda\in\sigma(T)$. Определим вспомогательную функцию g формулой $g(\mu)=(f(\lambda)-f(\mu))/(\lambda-\mu)$. По предыдущей теореме $f(\lambda)I-f(T)=(\lambda I-T)g(T)$. Поэтому если оператор $(f(\lambda)I-f(T))$ имеет ограниченный обратный B, то $g(T)B$ будет ограниченным оператором, обратным $(\lambda I-T)$. Таким образом, из условия $\lambda\in\sigma(T)$ следует, что $f(\lambda)\in\sigma(f(T))$. Обратно, пусть $\lambda\in\sigma(f(T))$; предположим, что $\lambda\notin f(\sigma(T))$. Тогда функция $g_1(\mu)=$ $=(f(\mu)-\lambda)^{-1}$ принадлежит $F(T)$ и, следовательно, по предыдущей теореме $g_1(T)(f(T)-\lambda I)=I$, а это противоречит предположению о том, что $\lambda\in\sigma(f(T))$.

Следствие 2. Если $f\in F(T)$, $g\in F(f(T))$ и $h(\lambda)=g(f(\lambda))$, то функция h принадлежит $F(T)$ и $h(T)=g(f(T))$.

Доказательство. Включение $h\in F(T)$ вытекает из следствия 1. Пусть U_1—открытая окрестность множества $\sigma(f(T))$, граница которой Γ_1 состоит из конечного числа спрямляемых жордановых дуг, и множество $U_1+\Gamma_1$ содержится в области голоморфности функции g. Пусть U_2 — окрестность множества $\sigma(T)$, граница которой Γ_2 состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, и множество $U_2+\Gamma_2$ содержится в области голоморфности функции f, причем $f(U_2+\Gamma_2)\subseteq U_1$. Тогда

$$R(\lambda;\ f(T))=(2\pi i)^{-1}\int\limits_{\Gamma_2}(\lambda-f(\mu))^{-1}R(\mu;\ T)\,d\mu$$

при всех значениях $\lambda\in\Gamma_1$, так как оператор, стоящий в правой части (обозначим его через S), удовлетворяет, согласно свойству (3), уравнению $(\lambda I-f(T))S=S(\lambda I-f(T))=I$. Применяя формулу

Коши, мы получаем

$$g(f(T)) = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_1} g(\lambda) R(\lambda; f(T))\, d\lambda =$$

$$= (-4\pi^2)^{-1} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} g(\lambda)(\lambda - f(\mu))^{-1} R(\mu; T)\, d\mu\, d\lambda =$$

$$= (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_2} R(\mu; T)\, g(f(\mu))\, d\mu = h(T),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Идея построения операторного исчисления на основе формулы (1) восходит к работам Пуанкаре по теории непрерывных групп (1899 г.). Приведенное здесь изложение операторного исчисления заимствовано из книги Данфорда — Шварца [1]. В следующей главе, посвященной полугруппам, мы распространим формулу (1) на неограниченные замкнутые операторы.

8. Изолированные особые точки резольвенты

Пусть λ_0 — изолированная особая точка резольвенты $R(\lambda; T)$ замкнутого линейного оператора T, отображающего комплексное B-пространство X в себя. Тогда резольвенту $R(\lambda; T)$ можно разложить в ряд Лорана

$$R(\lambda; T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n A_n, \quad A_n = (2\pi i)^{-1} \int_C (\lambda - \lambda_0)^{-n-1} R(\lambda; T)\, d\lambda, \tag{1}$$

где C — граница круга $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \varepsilon$ достаточно малого радиуса $\varepsilon > 0$, не содержащего никаких других особых точек резольвенты, кроме $\lambda = \lambda_0$, причем интегрирование выполняется в направлении положительного обхода C, т. е. против часовой стрелки. С помощью резольвентного уравнения можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Все операторы A_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ взаимно перестановочны (т. е. $A_{n_1} A_{n_2} = A_{n_2} A_{n_1}$; $n_1, n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) и являются ограниченными линейными операторами. При этом

$$\begin{aligned} TA_k &= A_k T && (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \\ A_k A_m &= 0 && \text{при} \quad k \geqslant 0,\ m \leqslant -1, \\ A_n &= (-1)^n A_0^{n+1} && \text{при} \quad n \geqslant 1, \\ A_{-p-q+1} &= A_{-p} A_{-q} && \text{при} \quad p,\ q \geqslant 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Доказательство. Ограниченность операторов A_n, их взаимная перестановочность и перестановочность с оператором T вытекают непосредственно из интегрального представления (1).