Коши, мы получаем

$$g(f(T)) = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_1} g(\lambda) R(\lambda;\ f(T))\, d\lambda =$$
$$= (-4\pi^2)^{-1} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} g(\lambda)(\lambda - f(\mu))^{-1} R(\mu;\ T)\, d\mu\, d\lambda =$$
$$= (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_2} R(\mu;\ T)\, g(f(\mu))\, d\mu = h(T),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Идея построения операторного исчисления на основе формулы (1) восходит к работам Пуанкаре по теории непрерывных групп (1899 г.). Приведенное здесь изложение операторного исчисления заимствовано из книги Данфорда — Шварца [1]. В следующей главе, посвященной полугруппам, мы распространим формулу (1) на неограниченные замкнутые операторы.

8. Изолированные особые точки резольвенты

Пусть λ_0 — изолированная особая точка резольвенты $R(\lambda;\ T)$ замкнутого линейного оператора T, отображающего комплексное B-пространство X в себя. Тогда резольвенту $R(\lambda;\ T)$ можно разложить в ряд Лорана

$$R(\lambda;\ T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n A_n, \quad A_n = (2\pi i)^{-1} \int_C (\lambda - \lambda_0)^{-n-1} R(\lambda;\ T)\, d\lambda, \tag{1}$$

где C — граница круга $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \varepsilon$ достаточно малого радиуса $\varepsilon > 0$, не содержащего никаких других особых точек резольвенты, кроме $\lambda = \lambda_0$, причем интегрирование выполняется в направлении положительного обхода C, т. е. против часовой стрелки. С помощью резольвентного уравнения можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Все операторы A_n $(n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$ взаимно перестановочны (т. е. $A_{n_1}A_{n_2} = A_{n_2}A_{n_1}$; $n_1,\ n_2 = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$) и являются ограниченными линейными операторами. При этом

$$\begin{aligned} TA_k &= A_kT \qquad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots), \\ A_kA_m &= 0 \qquad \text{при} \quad k \geqslant 0,\ m \leqslant -1, \\ A_n &= (-1)^n A_0^{n+1} \qquad \text{при} \quad n \geqslant 1, \\ A_{-p-q+1} &= A_{-p}A_{-q} \qquad \text{при} \quad p,\ q \geqslant 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Доказательство. Ограниченность операторов A_n, их взаимная перестановочность и перестановочность с оператором T вытекают непосредственно из интегрального представления (1).

Подставим разложение (1) резольвенты $R(\lambda;\ T)$ в резольвентное уравнение $R(\lambda;\ T)-R(\mu;\ T)=(\mu-\lambda)R(\lambda;\ T)R(\mu;\ T)$. Это приводит к формуле

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \frac{(\lambda-\lambda_0)^k-(\mu-\lambda_0)^k}{(\lambda-\lambda_0)-(\mu-\lambda_0)}=-\sum_{k,\ m=-\infty}^{\infty}{}' A_kA_m(\lambda-\lambda_0)^k(\mu-\lambda_0)^m.$$

Коэффициенты при A_n в левой части можно записать в виде

$$(\lambda-\lambda_0)^{n-1}+(\lambda-\lambda_0)^{n-2}(\mu-\lambda_0)+\ \ldots\ +(\mu-\lambda_0)^{n-1} \quad \text{при} \quad n\geqslant 1,$$

$$-\left\{(\lambda-\lambda_0)^{-n}(\mu-\lambda_0)^{-1}+(\lambda-\lambda_0)^{-n+1}(\mu-\lambda_0)^{-2}+\ \ldots\right.$$
$$\left.\ldots\ +(\lambda-\lambda_0)^{-1}(\mu-\lambda_0)^{-n}\right\} \quad \text{при} \quad n<0.$$

Отсюда следует, что слагаемые, содержащие произведения вида $(\lambda-\lambda_0)^k(\mu-\lambda_0)^m$ со значениями $k\geqslant 0$ и $m\leqslant -1$, должны обратиться в нуль, и поэтому $A_kA_m=0$ при $k\geqslant 0$, $m\leqslant -1$. Следовательно, функции

$$R^+(\lambda;\ T)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\lambda-\lambda_0)^n \quad \text{и} \quad R^-(\lambda;\ T)=\sum_{n=-\infty}^{-1}A_n(\lambda-\lambda_0)^n$$

должны каждая в отдельности удовлетворять резольвентному уравнению. Подставляя в резольвентное уравнение

$$R^+(\lambda;\ T)-R^+(\mu;\ T)=(\mu-\lambda)R^+(\lambda;\ T)R^+(\mu;\ T)$$

разложение $R^+(\lambda;\ T)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n(\lambda-\lambda_0)^n$, мы получаем

$$\sum_{p=1}^{\infty}A_p(h^p-k^p)=(k-h)\left(\sum_{p=0}^{\infty}A_ph^p\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty}A_qk^q\right),$$

где $h=(\lambda-\lambda_0)$, $k=(\mu-\lambda_0)$.

Разделив обе части этого равенства на $(k-h)$, мы приходим к равенству

$$-\sum_{p=1}^{\infty}A_p\left(h^{p-1}+h^{p-2}k+\ \ldots\ +k^{p-1}\right)=\sum_{p,\ q=0}^{\infty}h^pk^qA_pA_q,$$

откуда следует, что $-A_{p+q+1}=A_pA_q$ $(p,\ q\geqslant 0)$. Отсюда, в частности, имеем

$$A_1=-A_0^2,\ A_2=-A_1A_0=(-1)^2A_0^3,\ \ldots,\ A_n=(-1)^nA_0^{n+1}\ (n\geqslant 1).$$

Аналогично из резольвентного уравнения для функции $R^-(\lambda;\ T)$ мы, полагая $(\lambda-\lambda_0)^{-1}=h$, $(\mu-\lambda_0)^{-1}=k$, найдем

$$\sum_{p=1}^{\infty}A_{-p}\left(h^{p-1}+h^{p-2}k+\ \ldots\ +k^{p-1}\right)=\sum_{p,\ q=1}^{\infty}h^{p-1}k^{q-1}A_{-p}A_{-q},$$

откуда $A_{-p-q+1} = A_{-p}A_{-q}$ $(p, q \geqslant 1)$. Это дает, в частности,

$$A_{-1} = A_{-1}^2, \quad A_{-2} = A_{-1}A_{-2}, \; \ldots, \; A_{-n} = A_{-1}A_{-n} \qquad (n \geqslant 1).$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Имеют место формулы

$$\begin{aligned} A_n &= (T - \lambda_0 I)\, A_{n+1} \quad \text{при} \quad n \geqslant 0, \\ (T - \lambda_0 I)\, A_{-n} &= A_{-(n+1)} = (T - \lambda_0 I)^n A_{-1} \quad \text{при} \quad n \geqslant 1, \\ (T - \lambda_0 I)\, A_0 &= A_{-1} - I. \end{aligned} \tag{3}$$

Доказательство. Из интегрального представления оператора A_k видно, что область значений $R(A_k)$ принадлежит области определения оператора T, поэтому оператор A_k можно умножать слева на T. Утверждение теоремы вытекает из тождества

$$I = (\lambda I - T) \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k (\lambda - \lambda_0)^k =$$
$$= \{(\lambda - \lambda_0) I + (\lambda_0 I - T)\} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k (\lambda - \lambda_0)^k,$$

если приравнять коэффициенты, стоящие слева и справа при одинаковых степенях $(\lambda - \lambda_0)$.

Теорема 3. Если λ_0 — полюс порядка m резольвенты $R(\lambda; T)$, то λ_0 является собственным значением оператора T. Кроме того,

$$R(A_{-1}) = N((\lambda_0 I - T)^n) \text{ и } R(I - A_{-1}) = R((\lambda_0 I - T)^n) \text{ при } n \geqslant m. \tag{4}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$X = N((\lambda_0 I - T)^n) \oplus R((\lambda_0 I - T)^n) \quad \text{при} \quad n \geqslant m. \tag{5}$$

Доказательство. Поскольку A_{-1} — ограниченный линейный оператор, удовлетворяющий условию $A_{-1}^2 = A_{-1}$, то, как нетрудно видеть,

$$N(A_{-1}) = R(I - A_{-1}). \tag{6}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} &X_1 = N(A_{-1}) = R(I - A_{-1}), \\ &X_2 = R(A_{-1}), \quad N_n = N((\lambda_0 I - T)^n), \\ &R_n = R((\lambda_0 I - T)^n). \end{aligned} \tag{7}$$

Допустим, что $x \in N_n$, где $n \geqslant 1$. Тогда из равенства $(T - \lambda_0 I)^n A_{n-1} = (T - \lambda_0 I)\, A_0 = A_{-1} - I$ видно, что

$$0 = A_{n-1}(T - \lambda_0 I)^n x = (T - \lambda_0 I)^n A_{n-1} x = (T - \lambda_0 I)\, A_0 x = A_{-1} x - x,$$

откуда $x = A_{-1}x \in X_2$. Следовательно, при $n \geqslant 1$ множество N_n принадлежит X_2. Обратно, пусть $x \in X_2$. Тогда $x = A_{-1}y$, и так как $A_{-1} = A^2_{-1}$, то $x = A_{-1}A_{-1}y = A_{-1}x$. Поэтому $(T - \lambda_0 I)^n x = A_{-(n+1)}x$, поскольку $(T - \lambda_0 I)^n A_{-1} = A_{-(n+1)}$. По условию теоремы $A_{-(n+1)} = 0$ при $n \geqslant m$, поэтому $X_2 \subseteq N_n$ при $n \geqslant m$. Эти рассуждения показывают, что

$$N_n = X_2 \quad \text{при} \quad n \geqslant m. \tag{8}$$

Далее по условиям теоремы $A_{-m} \neq 0$ и $(T - \lambda_0 I) A_{-m} = A_{-(m+1)} = 0$; значит, число λ_0 является собственным значением оператора T.

Так как $(T - \lambda_0 I)^n A_{n-1} = A_{-1} - I$, то $X_1 = N(A_{-1}) = R(I - A_{-1}) \subseteq R_n$. Если $n \geqslant m$, то из условия $x \in R_n \cap N_n$ следует, что $x = 0$. Действительно, если $x = (\lambda_0 I - T)^n y$ и $(\lambda_0 I - T)^n x = 0$, то, согласно (8), $y \in N_{2n} = N_n$, и поэтому $x = 0$. Предположим теперь, что $x \in R_n$ при $n \geqslant m$, и представим элемент x в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 = (I - A_{-1}) x \in X_1$, $x_2 = A_{-1}x \in X_2$. Тогда $x_2 = x - x_1 \in R_n$, так как $X_1 \subseteq R_n$. Но из условия (8) видно, что $x_2 \in X_2 = N_n$, и поэтому $x_2 \in R_n \cap N_n$, т. е. $x_2 = 0$. Это показывает, что $x = x_1 \in X_1$. Тем самым мы доказали, что $R_n = X_1$ при $n \geqslant m$.

Теорема 4. Допустим, что T — такой ограниченный линейный оператор, что подпространство $X_2 = R(A_{-1})$ пространства X конечномерно. Тогда λ_0 является полюсом резольвенты $R(\lambda; T)$.

Доказательство. Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_k$ базис линейного пространства X_2. Векторы $x_1, Tx_1, T^2x_1, \ldots, T^k x_1$ принадлежат X_2 и линейно зависимы. Поэтому существует не равный тождественно нулю полином $P_1(\lambda)$, такой, что $P_1(T)x_1 = 0$. Точно так же существуют не равные тождественно нулю полиномы $P_2(\lambda), \ldots, P_k(\lambda)$, такие, что $P_j(T)x_j = 0$ $(j = 2, 3, \ldots, k)$. Тогда для полинома $P(\lambda) = \prod_{j=1}^{k} P_j(\lambda)$ мы получаем соотношения $P(T)x_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, и поэтому $P(T)x = 0$ при любом $x \in X_2$.

Разложим полином $P(\lambda)$ на множители. Это разложение всегда можно записать в виде $P(\lambda) = \alpha \prod_{j=0}^{s} (\lambda - \lambda_j)^{\nu_j}$ $(\alpha \neq 0)$, где $\nu_0 \geqslant 0$, $\nu_j \geqslant 1$ и $\lambda_j \neq \lambda_0$ при $j > 0$. Теперь покажем, что $(T - \lambda_0 I)^{\nu_0} x = 0$ для всякого вектора $x \in X_2$. В самом деле, предположим, что это не так; пусть $x_0 \in X_2$ — вектор, для которого $(T - \lambda_0 I)^{\nu_0} x_0 \neq 0$. Тогда, поскольку $P(T)x_0 = 0$, мы видим, что существуют по крайней мере одно значение $\lambda = \lambda_j$ $(j \neq 0)$ и полином $Q(\lambda)$, такие, что

$$(T - \lambda_j I) Q(T) (T - \lambda_0 I)^{\nu_0} x_0 = 0,$$

и при этом $y = Q(T)(T - \lambda_0 I)^{\nu_0} x_0 \neq 0$. Поэтому $y \in X_2$ представляет собой собственный вектор оператора T, соответствующий собственному значению λ_j. Следовательно, $(\lambda I - T) y = (\lambda - \lambda_j) y$. Умножая обе части этого равенства на $R(\lambda; T)$, мы получаем соотношение $y = (\lambda - \lambda_j) R(\lambda; T) y$, откуда следует, что

$$y = A_{-1} y = (2\pi i)^{-1} \int_C R(\lambda; T) y \, d\lambda = (2\pi i)^{-1} \int_C (\lambda - \lambda_j)^{-1} y \, d\lambda = 0,$$

где C — окружность достаточно малого радиуса с центром в точке λ_0. Таким образом, мы приходим к противоречию, и, следовательно, должно существовать целое положительное m, такое, что $(T - \lambda_0 I)^m X_2 = 0$. Поскольку $X_2 = R(A_{-1})$ и $(T - \lambda_0 I)^n A_{-1} = A_{-(n+1)}$, мы видим, что $A_{-(n+1)} = 0$ для всех $n \geqslant m$, т. е. λ_0 является полюсом резольвенты $R(\lambda; T)$.

Литература

Материал § 6 взят из книги Филлипса [2]; изложенное в § 8 заимствовано из работ Нагумо [1] и А. Тейлора [1]. Некоторые результаты, приведенные в этих параграфах, могут быть обобщены на локально выпуклые линейные топологические пространства. См., например, § 13 следующей главы [1]).

[1]) По спектральной теории линейных операторов см. также А. И. Плеснер [1*]. — *Прим. перев.*