ГЛАВА IX

Аналитическая теория полугрупп

Аналитическая теория полугрупп ограниченных линейных операторов, заданных в B-пространстве, изучает функции экспоненциального типа в бесконечномерных функциональных пространствах. Эта теория связана с задачей определения ограниченной операторнозначной функции $T(t)$, $t \geqslant 0$, удовлетворяющей уравнению

$$T(t+s) = T(t) \cdot T(s), \qquad T(0) = I.$$

Этой проблеме были посвящены исследования Хилле [2] и Иосида [5], опубликованные в 1948 г.[1])

Для решения этой задачи использовалось понятие ***инфинитезимального производящего оператора A полугруппы*** $T(t)$, который определяется как

$$A = s\text{-}\lim_{t \downarrow 0} t^{-1}(T(t) - I).$$

Порождение полугруппы $T(t)$ оператором A изучалось в терминах спектральных свойств инфинитезимального оператора.

Основные результаты теории полугрупп, как будет далее показано, представляют собой естественное обобщение теорем Стоуна [2], относящихся к однопараметрической группе унитарных операторов в гильбертовом пространстве. В гл. XIV будут рассмотрены приложения теории полугрупп к исследованию ***стохастических процессов*** и ***уравнений эволюционного типа***, включая уравнение диффузии, волновое уравнение и уравнение Шрёдингера.

В этой главе теория полугрупп непрерывных линейных операторов будет развита не только для банаховых пространств, но и для общих локально выпуклых линейных топологических пространств.

1. Полугруппы класса (C_0)

Предложение (Э. Хилле). Пусть X — некоторое B-пространство и $T_t \in L(X, X)$, $t \geqslant 0$, — однопараметрическое семейство операторов, обладающее следующим ***полугрупповым свойством***:

$$T_t T_s = T_{t+s} \quad \text{при всех } t, \ s > 0. \tag{1}$$

1) Исторический очерк развития теории полугрупп и подробная библиография имеются в книге Данфорд — Шварц [1], а также у Хилле — Филлипса [1]. — *Прим. перев.*

Если для всякого положительного числа a функция $p(t) = \ln \| T_t \|$ ограничена сверху на интервале вида $(0, a)$, то

$$\lim_{t \to \infty} t^{-1} \ln \| T_t \| = \inf_{t>0} t^{-1} \ln \| T_t \|. \tag{2}$$

Доказательство. Из неравенства $\| T_{t+s} \| = \| T_t T_s \| \leqslant \| T_t \| \cdot \| T_s \|$ следует, что $p(t+s) \leqslant p(t) + p(s)$. Пусть $\beta = \inf_{t>0} t^{-1} p(t)$. Очевидно, β либо конечно, либо равно $-\infty$. Допустим сейчас, что β — конечное число. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем такое число $a > 0$, что $p(a) \leqslant (\beta + \varepsilon) a$. Возьмем произвольное значение $t > 0$ и обозначим через n целое число, удовлетворяющее неравенству $na \leqslant t < (n+1) a$. Тогда

$$\beta \leqslant \frac{p(t)}{t} \leqslant \frac{p(na)}{t} + \frac{p(t-na)}{t} \leqslant \frac{na}{t} \frac{p(a)}{a} + \frac{p(t-na)}{t} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{na}{t} (\beta + \varepsilon) + \frac{p(t-na)}{t}.$$

По предположению величина $p(t - na)$ ограничена сверху при $t \to \infty$. Полагая $t \to \infty$, мы выводим из последнего неравенства формулу $\beta = \lim_{t \to \infty} t^{-1} p(t)$. Случай, когда $\beta = -\infty$, рассматривается совершенно аналогично.

Определение 1. Пусть семейство операторов $\{T_t;\ t \geqslant 0\} \subseteq L(X, X)$ удовлетворяет условиям

$$T_t \cdot T_s = T_{t+s} \quad \text{для всех } t,\ s \geqslant 0, \tag{1'}$$

$$T_0 = I, \tag{3}$$

$$s\text{-}\lim_{t \to t_0} T_t x = T_{t_0} x \ \text{ для любого } t_0 \geqslant 0 \text{ и любого } x \in X. \tag{4}$$

В этом случае мы будем называть семейство $\{T_t\}$ *полугруппой класса* (C_0).

С помощью доказанного выше предложения можно показать, что всякая полугруппа $\{T_t\}$ класса (C_0) подчиняется требованию

$$\| T_t \| \leqslant M e^{\beta t}, \qquad 0 \leqslant t < \infty, \tag{5}$$

где $M > 0$ и $\beta < \infty$ — некоторые постоянные.

Доказательство этого свойства совсем просто. Нужно только показать, что для всякого интервала вида $(0, a)$ $(\infty > a > 0)$ нормы $\| T_t \|$ ограничены при $t \in (0, a)$. Допустим противное и предположим, что существует такая последовательность $\{t_n\} \subseteq (0, a)$, что $\lim_{n \to \infty} t_n = t_0 \leqslant a$ и $\| T_{t_n} \| > n$. Тогда, согласно теореме о резонансе, последовательность $\| T_{t_n} x \|$ должна оказаться неограниченной по крайней мере при каком-то одном $x \in X$, что противоречит условию сильной непрерывности (4).

Замечание. Умножая операторы семейства $\{T_t\}$ на множитель $e^{-\beta t}$, мы, очевидно, получим новую полугруппу класса (C_0), которая будет удовлетворять условию *равномерной ограниченности*

$$\|T_t\| \leqslant M \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < \infty. \tag{6}$$

Если, в частности, $M \leqslant 1$, т. е.

$$\|T_t\| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{7}$$

то полугруппа $\{T_t\}$ называется *сжимающей полугруппой класса* (C_0).

Следующая теорема относится к условию сильной непрерывности (4).

Теорема. Пусть семейство $\{T_t, t \geqslant 0\}$ операторов $T_t \in L(X, X)$ удовлетворяет требованиям (1′) и (3); тогда свойство (4) эквивалентно условию

$$w\text{-}\lim_{t \downarrow 0} T_t x = x \quad \text{для каждого} \quad x \in X. \tag{8}$$

Доказательство. Допустим, что условие (8) выполняется. Обозначим через x_0 произвольный фиксированный элемент пространства X. Покажем, что $s\text{-}\lim\limits_{t \to t_0} T_t x_0 = T_{t_0} x_0$ при любом $t_0 \geqslant 0$. Для этого рассмотрим функцию $x(t) = T_t x_0$. Во всякой точке $t_0 \geqslant 0$ функция $x(t)$ слабо непрерывна справа, так как $w\text{-}\lim\limits_{t \downarrow t_0} T_t x_0 = w\text{-}\lim\limits_{h \downarrow 0} T_h T_{t_0} x_0 = T_{t_0} x_0$. Убедимся теперь в том, что нормы $\|T_t x_0\|$ ограничены в некоторой окрестности $t = 0$. В самом деле, если допустить противное, то должна существовать такая последовательность $\{t_n\}$, что $t_n \downarrow 0$ и $\lim\limits_{n \to \infty} \|T_{t_n} x_0\| = \infty$; это противоречит следствию 1, гл. II, § 1, условия которого ввиду слабой непрерывности функции $x(t) = T_t x_0$ справа выполняются. Следовательно, как показывает условие (1′), функция $T_t x_0 = x(t)$ ограничена на всяком бикомпактном множестве значений t. Более того, функция $x(t)$ оказывается слабо измеримой. Это вытекает из того, что всякая непрерывная справа вещественная функция $f(t)$ измерима по Лебегу; это можно показать, основываясь на том факте, что множество $\{t;\ f(t) < \alpha\}$ при любом значении α представляется в виде объединения интервалов с положительными длинами. Пусть $\{t_n\}$ — совокупность всех положительных рациональных чисел. Рассмотрим всевозможные конечные линейные комбинации вида $\sum\limits_j \beta_j x(t_j)$, где β_j — рациональные числа (если X — комплексное линейное пространство, то в качестве β_j берутся числа вида $\beta_j = a_j + i b_j$ с рациональными a_j, b_j). Эти комбинации образуют счетное множество $M = \{x_n\}$, такое, что множество $\{x(t);\ t \geqslant 0\}$ содержится в сильном замыкании M. Действительно, предположив противное, мы нашли бы число t', такое, что $x(t')$ не принадлежит M^a. Но множество M^a

является замкнутым линейным подпространством пространства X, и поэтому, согласно теореме 11, гл. V, § 1, оно слабо замкнуто. Поэтому предположение $x(t') \notin M^a$ противоречит слабой непрерывности справа функции $x(t)$, т. е. условию $x(t') = w\text{-}\lim\limits_{t_n \downarrow t'} x(t_n)$.

Теперь мы можем применить теорему Петтиса (гл. V, § 4), и, следовательно, функция $x(t)$ оказывается сильно измеримой. Поскольку норма $\|x(t)\|$ ограничена на всяком бикомпактном множестве точек t, можно рассматривать интеграл Бохнера $\int\limits_\alpha^\beta x(t)\,dt$, для которого справедливо неравенство

$$\left\| \int\limits_\alpha^\beta x(t)\,dt \right\| \leqslant \int\limits_\alpha^\beta \|x(t)\|\,dt \quad \text{для всех } 0 \leqslant \alpha \leqslant \beta < \infty.$$

Интеграл $\int\limits_\alpha^\beta x(t+s)\,dt = \int\limits_{\alpha+s}^{\beta+s} x(t)\,dt$ сильно непрерывен по s, так как функция $x(t)$ ограничена по норме на всяком бикомпактном множестве значений t. Это свойство Данфорд [3] использовал для доказательства сильной непрерывности функции $x(t)$ при $t>0$. Мы будем здесь следовать доказательству Данфорда.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем числа α, η, β и ξ так, чтобы $0 \leqslant \alpha < \eta < \beta < \xi - \varepsilon < \xi$. Так как $x(\xi) = T_\xi x_0 = T_\eta T_{\xi-\eta} x_0 = T_\eta x(\xi - \eta)$, то

$$(\beta - \alpha)\, x(\xi) = \int\limits_\alpha^\beta x(\xi)\,d\eta = \int\limits_\alpha^\beta T_\eta x(\xi - \eta)\,d\eta.$$

Ввиду (1'), (3) и ограниченности $\|T_t\|$ в некоторой окрестности $t=0$, вытекающей из следствия 1, гл. II, § 1, справедливо неравенство $\sup\limits_{\alpha \leqslant \eta \leqslant \beta} \|T_\eta\| < \infty$. Поэтому из соотношения

$$(\beta - \alpha)\{x(\xi \pm \varepsilon) - x(\xi)\} = \int\limits_\alpha^\beta T_\eta \{x(\xi \pm \varepsilon - \eta) - x(\xi - \eta)\}\,d\eta$$

следует оценка

$$(\beta - \alpha)\|x(\xi \pm \varepsilon) - x(\xi)\| \leqslant \sup_{\alpha \leqslant \eta \leqslant \beta} \|T_\eta\| \cdot \int\limits_{\xi-\beta}^{\xi-\alpha} \|x(\tau \pm \varepsilon) - x(\tau)\|\,d\tau.$$

Правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $\varepsilon \downarrow 0$ — это нетрудно обнаружить, аппроксимируя $x(\tau)$ простыми функциями.

Мы установили, таким образом, сильную непрерывность функции $x(t)$ при $t>0$. Непрерывность $x(t)$ в точке $t=0$ доказывается следующим образом. Для любого положительного рационального числа t_n имеем $T_t x(t_n) = T_t T_{t_n} x_0 = x(t+t_n)$. Отсюда на основании сильной непрерывности функции $x(t)$ при $t > 0$, которая была доказана выше, мы заключаем, что $s\text{-}\lim\limits_{t \downarrow 0} T_t x(t_n) = x(t_n)$. Каждое значение $x_m \in M$ представляет собой некоторую конечную линейную комбинацию элементов вида $x(t_n)$, и поэтому $s\text{-}\lim\limits_{t \downarrow 0} T_t x_m = x_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Но, с другой стороны, для любого значения $t \in [0, 1]$

$$\|x(t) - x_0\| \leqslant \|T_t x_m - x_m\| + \|x_m - x_0\| + \|T_t(x_0 - x_m)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|T_t x_m - x_m\| + \|x_m - x_0\| + \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|T_t\| \cdot \|x_0 - x_m\|.$$

Следовательно, $\overline{\lim\limits_{t \downarrow 0}} \|x(t) - x_0\| \leqslant \left(1 + \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|T_t\|\right) \cdot \|x_m - x_0\|$, так что $s\text{-}\lim\limits_{t \downarrow 0} x(t) = x_0$, поскольку $\inf\limits_{x_m \in M} \|x_0 - x_m\| = 0$.

2. Равностепенно непрерывные полугруппы класса (C_0) в локально выпуклых пространствах. Примеры полугрупп

Мы перейдем теперь к изучению полугрупп в общих локально выпуклых пространствах.

Определение. Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство и $\{T_t\}$, $t \geqslant 0$, $T_t \in L(X, X)$, — однопараметрическое семейство операторов, для которого выполняются следующие требования:

$$T_t T_s = T_{t+s}, \quad T_0 = I, \tag{1}$$

$$\lim_{t \to t_0} T_t x = T_{t_0} x \quad \text{для всех} \quad t_0 \geqslant 0 \quad \text{и любого } x \in X, \tag{2}$$

семейство $\{T_t\}$ *равностепенно непрерывно* (последнее условие означает, что для всякой непрерывной на пространстве X полунормы $p(x)$ существует непрерывная полунорма $q(x)$, такая, что $p(T_t x) \leqslant q(x)$ для всех значений $t \geqslant 0$ и всех элементов $x \in X$). (3)

В этом случае мы будем говорить, что в локально выпуклом пространстве X определена *равностепенно непрерывная полугруппа класса* (C_0).

Полугруппы $\{T_t\}$, удовлетворяющие условиям (1'), (3), (4) и (6) предыдущего параграфа представляют собой пример равностепенно непрерывных полугрупп класса (C_0).

Приведем теперь примеры конкретных полугрупп.