следующим образом. Для любого положительного рационального числа t_n имеем $T_t x(t_n) = T_t T_{t_n} x_0 = x(t + t_n)$. Отсюда на основании сильной непрерывности функции $x(t)$ при $t > 0$, которая была доказана выше, мы заключаем, что $s\text{-}\lim\limits_{t \downarrow 0} T_t x(t_n) = x(t_n)$. Каждое значение $x_m \in M$ представляет собой некоторую конечную линейную комбинацию элементов вида $x(t_n)$, и поэтому $s\text{-}\lim\limits_{t \downarrow 0} T_t x_m = x_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Но, с другой стороны, для любого значения $t \in [0, 1]$

$$\|x(t) - x_0\| \leqslant \|T_t x_m - x_m\| + \|x_m - x_0\| + \|T_t(x_0 - x_m)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|T_t x_m - x_m\| + \|x_m - x_0\| + \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|T_t\| \cdot \|x_0 - x_m\|.$$

Следовательно, $\overline{\lim\limits_{t \downarrow 0}} \|x(t) - x_0\| \leqslant \left(1 + \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|T_t\|\right) \cdot \|x_m - x_0\|$, так что $s\text{-}\lim\limits_{t \downarrow 0} x(t) = x_0$, поскольку $\inf\limits_{x_m \in M} \|x_0 - x_m\| = 0$.

2. Равностепенно непрерывные полугруппы класса (C_0) в локально выпуклых пространствах. Примеры полугрупп

Мы перейдем теперь к изучению полугрупп в общих локально выпуклых пространствах.

Определение. Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство и $\{T_t\}$, $t \geqslant 0$, $T_t \in L(X, X)$, — однопараметрическое семейство операторов, для которого выполняются следующие требования:

$$T_t T_s = T_{t+s}, \quad T_0 = I, \tag{1}$$

$$\lim_{t \to t_0} T_t x = T_{t_0} x \quad \text{для всех} \quad t_0 \geqslant 0 \quad \text{и любого } x \in X, \tag{2}$$

семейство $\{T_t\}$ *равностепенно непрерывно* (последнее условие означает, что для всякой непрерывной на пространстве X полунормы $p(x)$ существует непрерывная полунорма $q(x)$, такая, что $p(T_t x) \leqslant q(x)$ для всех значений $t \geqslant 0$ и всех элементов $x \in X$). (3)

В этом случае мы будем говорить, что в локально выпуклом пространстве X определена *равностепенно непрерывная полугруппа класса* (C_0).

Полугруппы $\{T_t\}$, удовлетворяющие условиям (1′), (3), (4) и (6) предыдущего параграфа представляют собой пример равностепенно непрерывных полугрупп класса (C_0).

Приведем теперь примеры конкретных полугрупп.

Пример 1. Возьмем пространство $C[0, \infty]$ ограниченных и равномерно непрерывных вещественных (или комплексных) функций $x(s)$, заданных в промежутке $[0, \infty)$. Определим на $C[0, \infty]$ с помощью формулы

$$(T_t x)(s) = x(t+s)$$

операторы T_t, $t \geqslant 0$. Условие (1) здесь, очевидно, выполняется. Свойство (2) вытекает из равномерной непрерывности функций $x(s)$. Наконец, $\|T_t\| \leqslant 1$, так что $\{T_t\}$ — это сжимающая полугруппа класса (C_0), и условие (3), очевидно, выполняется. В этом примере можно заменить $C[0, \infty]$ пространством $C[-\infty, \infty]$ или $L^p(-\infty, \infty)$.

Пример 2. Возьмем пространство $C[-\infty, \infty]$. Рассмотрим гауссовскую плотность вероятностей

$$N_t(u) = (2\pi t)^{-1/2} e^{-u^2/2t}, \qquad -\infty < u < \infty, \quad t > 0.$$

Определим операторы T_t, $t \geqslant 0$, отображающие пространство $C[-\infty, \infty]$ в себя:

$$(T_t x)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} N_t(s-u)\, x(u)\, du \quad \text{при} \quad t > 0,$$

$$(T_t x)(s) = x(s) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Каждый оператор T_t непрерывен, так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty} N_t(s-u)\, du = 1$, и поэтому

$$\|T_t x\| \leqslant \|x\| \cdot \int_{-\infty}^{\infty} N_t(s-u)\, du = \|x\|.$$

По определению $T_0 = I$, а полугрупповое свойство $T_t T_s = T_{t+s}$ следует из известной формулы теории гауссовских случайных величин:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(t+t')}} e^{-u^2/2(t+t')} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t'}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u-v)^2/2t} \cdot e^{-v^2/2t'}\, dv.$$

Эту формулу можно вывести, применяя преобразование Фурье и используя формулы (10) и (13) гл. VI, § 1. Чтобы убедиться в сильной непрерывности функции T_t по переменной t, заметим, что

$$x(s) = \int_{-\infty}^{\infty} N_t(s-u)\, x(s)\, du.$$

Поэтому

$$(T_t x)(s) - x(s) = \int_{-\infty}^{\infty} N_t(s-u)(x(u) - x(s))\, du,$$

а это выражение заменой переменной $(s-u)/\sqrt{t}=z$ приводится к интегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_1(z)\left(x\left(s-\sqrt{t}\,z\right)-x(s)\right)dz \qquad (N_1=N_t|_{t=1}).$$

Так как функция $x(s)$ равномерно непрерывна в промежутке $(-\infty, \infty)$, для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, такое, что $|x(s_1)-x(s_2)|\leqslant\varepsilon$ при условии $|s_1-s_2|\leqslant\delta$. Разбивая написанный выше интеграл на слагаемые, мы приходим к неравенству

$$\begin{aligned}|(T_tx)(s)-x(s)|\leqslant &\int\limits_{|\sqrt{t}\cdot z|\leqslant\delta} N_1(z)\left|x\left(s-\sqrt{t}\cdot z\right)-x(s)\right|dz+\\ +\int\limits_{|\sqrt{t}\cdot z|>\delta} N_1(z)\left|x\left(s-\sqrt{t}\cdot z\right)-x(s)\right|dz\leqslant\varepsilon &\int\limits_{|\sqrt{t}\cdot z|\leqslant\delta} N_1(z)\,dz+\\ +2\|x\|\int\limits_{|\sqrt{t}\cdot z|>\delta} N_1(z)\,dz\leqslant\varepsilon+2\|x\| &\int\limits_{|\sqrt{t}\cdot z|>\delta} N_1(z)\,dz.\end{aligned}$$

Второй член в правой части этой суммы стремится к нулю при $t\to 0$, так как интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} N_1(z)\,dz$ сходится. Таким образом, $\limsup\limits_{t\downarrow 0}\sup\limits_{s}|(T_tx)(s)-x(s)|=0$ и, следовательно, $s\text{-}\lim\limits_{t\downarrow 0} T_tx=x$. Тем самым, учитывая теорему предыдущего параграфа, мы доказали равенство (2).

В этом примере можно заменить пространство $C[-\infty, \infty]$ на $L^p(-\infty, \infty)$. Рассмотрим случай пространства $L^1(-\infty, \infty)$. Тогда по теореме Фубини

$$\|T_tx\|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} N_t(s-u)\,|x(u)|\,ds\,du\leqslant\|x\|.$$

Сильная непрерывность доказывается так же, как в предыдущем примере:

$$\begin{aligned}\|T_tx-x\|&=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} N_1(z)\left(x\left(s-\sqrt{t}\cdot z\right)-x(s)\right)dz\right|ds\leqslant\\ &\leqslant\int_{-\infty}^{\infty} N_1(z)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|x\left(s-\sqrt{t}\cdot z\right)-x(s)\right|ds\right]dz\leqslant\\ &\leqslant 2\int_{-\infty}^{\infty} N_1(z)\,dz\cdot\|x\|.\end{aligned}$$

Отсюда по лемме Лебега — Фату

$$\overline{\lim_{t \downarrow 0}} \| T_t x - x \| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} N_1(z) \left(\overline{\lim_{t \downarrow 0}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| x\left(s - \sqrt{t} \cdot z\right) - x(s) \right| ds \right) dz = 0,$$

так как интеграл Лебега непрерывен по параметру в смысле сходимости в среднем — это легко показать, аппроксимируя $x(s)$ простыми функциями.

Пример 3. Рассмотрим пространство $C[-\infty, \infty]$. Пусть $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Определим равенством

$$(T_t x)(s) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} x(s - k\mu)$$

операторы T_t, $t \geqslant 0$, отображающие пространство $C[-\infty, \infty]$ в себя. Тогда

$$\begin{aligned}(T_w(T_t x))(s) &= e^{-\lambda w} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda w)^m}{m!} \left[e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} x(s - k\mu - m\mu) \right] = \\ &= e^{-\lambda(w+t)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left[p! \sum_{m=0}^{p} \frac{(\lambda w)^m}{m!} \frac{(\lambda t)^{p-m}}{(p-m)!} x(s - p\mu) \right] = \\ &= e^{-\lambda(w+t)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (\lambda w + \lambda t)^p x(s - p\mu) = (T_{w+t} x)(s),\end{aligned}$$

т. е. полугрупповое свойство имеет место. Нетрудно также убедиться в том, что определенные здесь операторы T_t образуют сжимающую полугруппу класса (C_0).

3. *Инфинитезимальный производящий оператор равностепенно непрерывной полугруппы класса* (C_0)

Пусть равностепенно непрерывная полугруппа $\{T_t;\ t \geqslant 0\}$ класса (C_0) определена на локально выпуклом линейном топологическом пространстве X. Предположим, что X — *секвенциально полное* пространство. *Инфинитезимальный производящий оператор* A полугруппы $\{T_t\}$ мы определим как предел

$$Ax = \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(T_h - I)x. \tag{1}$$

Таким образом, A — линейный оператор с областью определения

$$D(A) = \left\{ x \in X;\ \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(T_h - I)x \ \text{ существует в } X \right\},$$