Отсюда по лемме Лебега — Фату

$$\overline{\lim_{t \downarrow 0}} \| T_t x - x \| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} N_1(z) \left(\overline{\lim_{t \downarrow 0}} \int_{-\infty}^{\infty} | x(s - \sqrt{t} \cdot z) - x(s) | \, ds \right) dz = 0,$$

так как интеграл Лебега непрерывен по параметру в смысле сходимости в среднем — это легко показать, аппроксимируя $x(s)$ простыми функциями.

Пример 3. Рассмотрим пространство $C[-\infty, \infty]$. Пусть $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Определим равенством

$$(T_t x)(s) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} x(s - k\mu)$$

операторы T_t, $t \geqslant 0$, отображающие пространство $C[-\infty, \infty]$ в себя. Тогда

$$\begin{aligned}(T_w(T_t x))(s) &= e^{-\lambda w} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda w)^m}{m!} \left[e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} x(s - k\mu - m\mu) \right] = \\ &= e^{-\lambda (w+t)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left[p! \sum_{m=0}^{p} \frac{(\lambda w)^m}{m!} \frac{(\lambda t)^{p-m}}{(p-m)!} x(s - p\mu) \right] = \\ &= e^{-\lambda (w+t)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (\lambda w + \lambda t)^p \, x(s - p\mu) = (T_{w+t} x)(s),\end{aligned}$$

т. е. полугрупповое свойство имеет место. Нетрудно также убедиться в том, что определенные здесь операторы T_t образуют сжимающую полугруппу класса (C_0).

3. Инфинитезимальный производящий оператор равностепенно непрерывной полугруппы класса (C_0)

Пусть равностепенно непрерывная полугруппа $\{T_t; t \geqslant 0\}$ класса (C_0) определена на локально выпуклом линейном топологическом пространстве X. Предположим, что X — *секвенциально полное* пространство. *Инфинитезимальный производящий оператор* A полугруппы $\{T_t\}$ мы определим как предел

$$Ax = \lim_{h \downarrow 0} h^{-1} (T_h - I) x. \tag{1}$$

Таким образом, A — линейный оператор с областью определения

$$D(A) = \left\{ x \in X; \ \lim_{h \downarrow 0} h^{-1} (T_h - I) x \ \text{ существует в } X \right\},$$

и $Ax = \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(T_h - I)x$ для $x \in D(A)$. Множество $D(A)$ не пусто, поскольку вектор $x = 0$ во всяком случае принадлежит $D(A)$. В действительности же область $D(A)$ существенно шире. Имеет место следующая

Теорема 1. Множество $D(A)$ плотно в пространстве X.

Доказательство. Положим $\varphi_n(s) = ne^{-ns}$, $n > 0$. Рассмотрим умноженное на *n преобразование Лапласа* функции T_s

$$C_{\varphi_n}x = \int_0^\infty \varphi_n(s)\, T_s x\, ds \quad \text{для} \quad x \in X, \tag{2}$$

где интеграл понимается в смысле Римана. Обычная конструкция интеграла Римана от числовых функций может быть перенесена на функции со значениями из локально выпуклого секвенциально полного пространства X, если вместо абсолютной величины числа использовать определенные на X непрерывные полунормы p.

Сходимость несобственного интеграла следует из равностепенной непрерывности полугруппы T_t, соотношения

$$p(\varphi_n(s)\, T_s x) = ne^{-ns}\, p(T_s x)$$

и секвенциальной полноты пространства X.

Из неравенства

$$p\left(C_{\varphi_n}x\right) \leqslant \int_0^\infty ne^{-ns} p(T_s x)\, ds \leqslant \sup_{s \geqslant 0} p(T_s x)$$

можно заключить, что C_{φ_n} — это непрерывный линейный оператор, принадлежащий $L(X, X)$. Покажем, что

$$R\left(C_{\varphi_n}\right) \subseteq D(A) \quad \text{для любого} \quad n > 0 \tag{3}$$

и

$$\lim_{n \to \infty} C_{\varphi_n}x = x \quad \text{при всех} \quad x \in X. \tag{4}$$

Из этого, очевидно, будет следовать, что множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} R\left(C_{\varphi_n}\right)$ и тем более область $D(A)$ плотны в X.

Для доказательства утверждения (3) мы используем формулу

$$h^{-1}(T_h - I)\, C_{\varphi_n}x = h^{-1}\int_0^\infty \varphi_n(s)\, T_h T_s x\, ds - h^{-1}\int_0^\infty \varphi_n(s)\, T_s x\, ds.$$

Линейность и непрерывность оператора T_h позволяют изменять порядок операций в форме $T_h \int_0^\infty \ldots = \int_0^\infty T_h \ldots$, поэтому

$$h^{-1}(T_h - I) C_{\varphi_n} x = h^{-1} \int_0^\infty \varphi_n(s) T_{s+h} x \, ds - h^{-1} \int_0^\infty \varphi_n(s) T_s x \, ds =$$

$$= \frac{e^{nh}-1}{h} n \int_h^\infty e^{-n\sigma} T_\sigma x \, d\sigma - \frac{1}{h} n \int_0^h e^{-ns} T_s x \, ds =$$

$$= \frac{e^{nh}-1}{h} \left\{ C_{\varphi_n} x - \int_0^h n e^{-n\sigma} T_\sigma x \, d\sigma \right\} - \frac{1}{h} \int_0^h \varphi_n(s) T_s x \, ds.$$

Выражение $\varphi_n(s) T_s x$ непрерывно по s, значит второе слагаемое в правой части последнего выражения стремится к $-\varphi_n(0) T_0 x = -nx$ при $h \downarrow 0$. Эти же соображения показывают, что первое слагаемое в правой части стремится к $n C_{\varphi_n} x$ при $h \downarrow 0$. Следовательно, $C_{\varphi_n} x$ принадлежит $D(A)$ и

$$A C_{\varphi_n} x = n \left(C_{\varphi_n} - I\right) x, \qquad x \in X. \tag{5}$$

Теперь выведем формулу (4). Так как $\int_0^\infty n e^{-ns} \, ds = 1$, то

$$C_{\varphi_n} x - x = n \int_0^\infty e^{-ns} (T_s x - x) \, ds,$$

$$p\left(C_{\varphi_n} x - x\right) \leqslant n \int_0^\infty e^{-ns} p(T_s x - x) \, ds = n \int_0^\delta \ldots + n \int_\delta^\infty \ldots = J_1 + J_2,$$

где $\delta > 0$ — произвольное положительное число. Для любого $\varepsilon > 0$ мы, поскольку функция $T_s x$ непрерывна по s, можем выбрать $\delta > 0$, такое, что $p(T_s x - x) \leqslant \varepsilon$ при $0 \leqslant s \leqslant \delta$. Поэтому

$$J_1 \leqslant \varepsilon n \int_0^\delta e^{-ns} \, ds \leqslant \varepsilon n \int_0^\infty e^{-ns} \, ds = \varepsilon.$$

При фиксированном значении $\delta > 0$

$$J_2 \leqslant n \int_\delta^\infty e^{-ns} (p(T_s x) + p(x)) \, ds \to 0 \quad \text{при} \quad n \uparrow \infty,$$

так как множество $\{T_s x\}$ равномерно ограничено при $s \geqslant 0$. Отсюда и вытекает справедливость соотношения (4).

Определение. Определим для полугруппы операцию дифференцирования D_t формулой

$$D_t T_t x = \lim_{h \to 0} h^{-1}(T_{t+h} - T_t)\,x,$$

имея в виду те значения $x \in X$, при которых предел, написанный в правой части, существует.

Теорема 2. Если $x \in D(A)$, то $x \in D(D_t T_t)$ и

$$D_t T_t x = A T_t x = T_t A x, \qquad t \geqslant 0. \tag{7}$$

Таким образом, оператор A перестановочен с оператором T_t, или, как говорят, операторы A и T_t *коммутируют* друг с другом.

Доказательство. Если $x \in D(A)$, то, поскольку оператор T_t непрерывен,

$$T_t A x = T_t \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(T_h - I)\,x = \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(T_t T_h - T_t)\,x =$$
$$= \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(T_{t+h} - T_t)\,x = \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(T_h - I)\,T_t x = A T_t x.$$

Следовательно, если $x \in D(A)$, то $T_t x \in D(A)$ и $T_t A x = A T_t x = \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(T_{t+h} - T_t)\,x$. Мы, таким образом, показали, что правая производная от $T_t x$ (в смысле определения (6)) существует при всех $x \in D(A)$. Теперь мы убедимся в том, что и левая производная тоже существует и совпадает с правой производной.

С этой целью выберем произвольный функционал $f_0 \in X'$. Тогда из приведенных выше рассуждений следует, что при всяком фиксированном значении x числовая функция $f_0(T_t x) = \langle T_t x, f_0 \rangle$ непрерывна по t при $t \geqslant 0$ и обладает правой производной $d^+ f_0(T_t x)/dt$, равной значению $f_0(A T_t x) = f_0(T_t A x)$. Отсюда мы заключаем, что производная $d^+ f_0(T_t x)/dt$ непрерывна по t. Ниже доказывается известная

Лемма. Если хотя бы одно из производных чисел

$$\overline{D}^+ f(t), \quad \underline{D}^+ f(t), \quad \overline{D}^- f(t) \quad \text{или} \quad \underline{D}^- f(t)$$

непрерывной вещественной функции $f(t)$ является конечной непрерывной функцией от t, то $f(t)$ дифференцируема и ее производная непрерывна и совпадает со значениями $\overline{\underline{D}}^{\pm} f(t)$.

Применяя эту лемму, мы видим, что функция $f_0(T_t x)$ дифференцируема по t и

$$f_0(T_t x - x) = f_0(T_t x) - f_0(T_0 x) = \int_0^t (d^+ f_0(T_s x)/ds)\,ds =$$
$$= \int_0^t f_0(T_s A x)\,ds = f_0\left(\int_0^t T_s A x\,ds\right).$$

Так как функционал $f_0 \in X'$ был взят совершенно произвольно, то отсюда вытекает, что

$$T_t x - x = \int_0^t T_s A x\, ds \quad \text{для каждого } x \in D(A).$$

Функция $T_s A x$ непрерывна по s, и поэтому последнее равенство означает, что выражение $T_t x$ дифференцируемо по t в топологии пространства X и

$$D_t T_t x = \lim_{h \to 0} h^{-1} \int_t^{t+h} T_s A x\, ds = T_t A x.$$

Утверждение (7) тем самым доказано.

Доказательство леммы. Покажем вначале, что условие $\overline{D}^+ f(t) \geqslant 0$ при $a \leqslant t \leqslant b$ влечет за собой неравенство $f(b) - f(a) \geqslant 0$. Допустим противное, пусть $f(b) - f(a) < -\varepsilon(b-a)$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое фиксированное положительное число. Тогда для функции $g(t) = f(t) - f(a) + \varepsilon(t-a)$ справедливо неравенство $\overline{D}^+ g(a) = \overline{D}^+ f(a) + \varepsilon > 0$, а так как $g(a) = 0$, то при некотором значении $t_0 > a$, лежащем вблизи точки a, $g(t_0) > 0$. Поскольку функция $g(t)$ непрерывна и $g(b) < 0$, найдется такое значение t_1 ($a < t_0 < t_1 < b$), что $g(t_1) = 0$ и $g(t) < 0$ при $t_1 < t < b$. Значит, $\overline{D}^+ g(t_1) \leqslant 0$, что противоречит условию $\overline{D}^+ g(t_1) = \overline{D}^+ f(t_1) + \varepsilon > 0$.

Применяя далее аналогичные рассуждения к функциям вида $f(t) - \alpha t$ и $\beta t - f(t)$, мы приходим к следующему заключению: если одно из выражений $\overline{\underline{D}}^{\pm} f(t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\alpha \leqslant \overline{\underline{D}}^{\pm} f(t) \leqslant \beta \text{ на некотором сегменте } [t_1,\ t_2],$$

то $\alpha \leqslant (f(t_2) - f(t_1))/(t_2 - t_1) \leqslant \beta$. Следовательно, точные верхние и нижние грани функций $\overline{\underline{D}}^{\pm} f(t)$ на любом отрезке вида $[t_1,\ t_2]$ одинаковы. Это и приводит к заключению о том, что если для непрерывной вещественной функции $f(t)$ хотя бы одно из четырех выражений $\overline{\underline{D}}^{\pm} f(t)$ непрерывно на сегменте $[t_1,\ t_2]$, то все четыре производных числа совпадают и равны производной $f'(t)$, что и требовалось доказать.

4. Резольвента инфинитезимального производящего оператора A

Теорема 1. Оператор $(nI - A)$ при значениях $n > 0$ обладает обратным оператором $R(n;\ A) = (nI - A)^{-1} \in L(X,\ X)$, и

$$R(n;\ A)\, x = \int_0^\infty e^{-ns} T_s x\, ds \quad \text{при всех} \quad x \in X. \tag{1}$$