Так как функционал $f_0 \in X'$ был взят совершенно произвольно, то отсюда вытекает, что

$$T_t x - x = \int_0^t T_s A x \, ds \quad \text{для каждого } x \in D(A).$$

Функция $T_s A x$ непрерывна по s, и поэтому последнее равенство означает, что выражение $T_t x$ дифференцируемо по t в топологии пространства X и

$$D_t T_t x = \lim_{h \to 0} h^{-1} \int_t^{t+h} T_s A x \, ds = T_t A x.$$

Утверждение (7) тем самым доказано.

Доказательство леммы. Покажем вначале, что условие $\overline{D}^+ f(t) \geqslant 0$ при $a \leqslant t \leqslant b$ влечет за собой неравенство $f(b) - f(a) \geqslant 0$. Допустим противное, пусть $f(b) - f(a) < -\varepsilon(b-a)$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое фиксированное положительное число. Тогда для функции $g(t) = f(t) - f(a) + \varepsilon(t-a)$ справедливо неравенство $\overline{D}^+ g(a) = \overline{D}^+ f(a) + \varepsilon > 0$, а так как $g(a) = 0$, то при некотором значении $t_0 > a$, лежащем вблизи точки a, $g(t_0) > 0$. Поскольку функция $g(t)$ непрерывна и $g(b) < 0$, найдется такое значение t_1 $(a < t_0 < t_1 < b)$, что $g(t_1) = 0$ и $g(t) < 0$ при $t_1 < t < b$. Значит, $\overline{D}^+ g(t_1) \leqslant 0$, что противоречит условию $\overline{D}^+ g(t_1) = \overline{D}^+ f(t_1) + \varepsilon > 0$.

Применяя далее аналогичные рассуждения к функциям вида $f(t) - \alpha t$ и $\beta t - f(t)$, мы приходим к следующему заключению: если одно из выражений $\overline{\underline{D}}^{\pm} f(t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\alpha \leqslant \overline{\underline{D}}^{\pm} f(t) \leqslant \beta \text{ на некотором сегменте } [t_1, t_2],$$

то $\alpha \leqslant (f(t_2) - f(t_1))/(t_2 - t_1) \leqslant \beta$. Следовательно, точные верхние и нижние грани функций $\overline{\underline{D}}^{\pm} f(t)$ на любом отрезке вида $[t_1, t_2]$ одинаковы. Это и приводит к заключению о том, что если для непрерывной вещественной функции $f(t)$ хотя бы одно из четырех выражений $\overline{\underline{D}}^{\pm} f(t)$ непрерывно на сегменте $[t_1, t_2]$, то все четыре производных числа совпадают и равны производной $f'(t)$, что и требовалось доказать.

4. *Резольвента инфинитезимального производящего оператора A*

Теорема 1. Оператор $(nI - A)$ при значениях $n > 0$ обладает обратным оператором $R(n; A) = (nI - A)^{-1} \in L(X, X)$, и

$$R(n; A)x = \int_0^\infty e^{-ns} T_s x \, ds \quad \text{при всех} \quad x \in X. \tag{1}$$

Иными словами, все вещественные положительные числа принадлежат резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A.

Доказательство. Убедимся сначала в том, что оператор $(nI-A)^{-1}$ существует. Для этого допустим, что имеется такой элемент $x_0 \neq 0$, что $(nI-A)x_0=0$, т. е. $Ax_0=nx_0$. Возьмем непрерывный линейный функционал $f_0 \in X'$, такой, что $f_0(x_0)=1$, и положим $\varphi(t)=$ $=f_0(T_t x_0)$. По теореме 2 предыдущего параграфа функция $\varphi(t)$ дифференцируема, так как по предположению $x_0 \in D(A)$, и

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=f_0(D_t T_t x_0)=f_0(T_t A x_0)=f_0(T_t n x_0)=n\varphi(t).$$

Если мы решим это дифференциальное уравнение при начальном условии $\varphi(0)=f_0(x_0)=1$, то получим $\varphi(t)=e^{nt}$. Но функция $\varphi(t)=f_0(T_t x_0)$ ограничена по t, так как выражение $T_t x_0$ равномерно ограничено при $t \geqslant 0$, а функционал f_0 непрерывен. Полученное противоречие показывает, что обратный оператор $(nI-A)^{-1}$ должен существовать.

По формуле (5) предыдущего параграфа $AC_{\varphi_n}x=n\left(C_{\varphi_n}-I\right)x$, и поэтому $(nI-A)C_{\varphi_n}x=nx$ для всех $x \in X$. Оператор $(nI-A)$ отображает, таким образом, область $R\left(C_{\varphi_n}\right) \subseteq D(A)$ на все пространство X взаимно однозначно. Поэтому тем более этот оператор отображает множество $D(A)$ на пространство X однозначно в обе стороны, так как обратный оператор $(nI-A)^{-1}$, как было показано, существует. Следовательно, $R\left(C_{\varphi_n}\right)=D(A)$ и $(nI-A)^{-1}=n^{-1}C_{\varphi_n}$. Теорема доказана.

Следствие 1. Правая полуплоскость комплексной λ-плоскости является резольвентным множеством $\rho(A)$ оператора A, и

$$R(\lambda;\, A)x=(\lambda I-A)^{-1}x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t x\, dt$$

$$\text{при} \quad \operatorname{Re}(\lambda)>0 \quad \text{и любом} \quad x \in X. \tag{2}$$

Доказательство. При фиксированном вещественном значении τ операторы $\{e^{-i\tau t}T_t;\ t \geqslant 0\}$ образуют равностепенно непрерывную полугруппу класса (C_0). Инфинитезимальный производящий оператор этой полугруппы, как нетрудно заметить, равен $(A-i\tau I)$. Поэтому для любого $\sigma>0$ резольвента $R(\sigma+i\tau;\, A)=((\sigma+i\tau)I-A)^{-1}$ существует и

$$R((\sigma+i\tau)I-A)x=\int_0^\infty e^{-(\sigma+i\tau)s}T_s x\, ds \quad \text{при всех} \quad x \in X. \tag{2'}$$

Следствие 2. Имеют место следующие утверждения:

$$D(A) = R\left((\lambda I - A)^{-1}\right) = R(R(\lambda;\ A)) \quad \text{при} \quad \mathrm{Re}(\lambda) > 0, \tag{3}$$

$$AR(\lambda;\ A)x = R(\lambda;\ A)Ax = (\lambda R(\lambda;\ A) - I)x \quad \text{при} \quad x \in D(A), \tag{4}$$

$$AR(\lambda;\ A)x = (\lambda R(\lambda;\ A) - I)x \quad \text{для всех} \quad x \in X, \tag{5}$$

$$\lim_{\lambda \uparrow \infty} \lambda R(\lambda;\ A)x = x \quad \text{при} \quad x \in X. \tag{6}$$

Доказательство. Эти утверждения с очевидностью вытекают из условия (4) предыдущего параграфа и определения резольвенты $R(\lambda;\ A) \equiv (\lambda I - A)^{-1}$.

Следствие 3. Инфинитезимальный производящий оператор A обладает следующим свойством:

$$\text{если } x_h \in D(A) \quad \text{и} \quad \lim_{h\to\infty} x_h = x \in X, \quad \lim_{h\to\infty} Ax_h = y \in X,$$
$$\text{то } x \in D(A) \quad \text{и} \quad Ax = y.$$

В этом смысле оператор A можно назвать замкнутым оператором (ср. гл. II, § 6).

Доказательство. Положим $(I - A)x_h = z_h$. Тогда $\lim\limits_{h\to\infty} z_h = x - y$. Отсюда, вследствие непрерывности оператора $(I - A)^{-1}$,

$$\lim_{h\to\infty} (I - A)^{-1} z_h = (I - A)^{-1}(x - y),$$

т. е. $x = (I - A)^{-1}(x - y)$, $(I - A)x = x - y$. Это и показывает, что $y = Ax$.

Теорема 2. Семейство операторов

$$\{(\lambda R(\lambda;\ A))^n\} \tag{7}$$

равностепенно непрерывно относительно значений $\lambda > 0$ и $n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Из резольвентного уравнения (гл. VIII, § 2, (2))

$$R(\mu;\ A) - R(\lambda;\ A) = (\lambda - \mu)R(\mu;\ A)R(\lambda;\ A),$$

учитывая, что, как показывает условие (2), $\lim\limits_{\mu\to\lambda} R(\mu;\ A)y = R(\lambda;\ A)y$ $(y \in X)$, мы получаем

$$\lim_{\mu\to\lambda} (\mu - \lambda)^{-1}(R(\mu;\ A) - R(\lambda;\ A))x =$$
$$= dR(\lambda;\ A)x/d\lambda = -R(\lambda;\ A)^2 x, \quad x \in X.$$

Следовательно, резольвента $R(\lambda;\ A)x$ бесконечно дифференцируема по λ при $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ и

$$d^n R(\lambda;\ A)x/d\lambda^n = (-1)^n n!\, R(\lambda;\ A)^{n+1} x \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

С другой стороны, дифференцируя равенство (2) n раз по λ, мы видим, что

$$d^n R(\lambda;\ A)\,x/d\lambda^n = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(-t)^n T_t x\,dt. \tag{9}$$

Дифференцирование под знаком интеграла в (9) оправдано, так как семейство $\{T_t x\}$ равномерно ограничено по t и $\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n\,dt = (n!)/\lambda^{n+1}$ при $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$. Таким образом,

$$(\lambda R(\lambda;\ A))^{n+1} x = \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n T_t x\,dt$$
$$\text{для всех } x \in X \text{ и } \operatorname{Re}(\lambda) > 0, \tag{10}$$

и поэтому для всякой непрерывной на X полунормы p и произвольных $\lambda > 0$, $n > 0$

$$p\left((\lambda R(\lambda;\ A))^{n+1} x\right) \leqslant \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n\,dt \cdot \sup_{t\geqslant 0} p(T_t x) = \sup_{t\geqslant 0} p(T_t x). \tag{11}$$

Отсюда ввиду равностепенной непрерывности семейства $\{T_t\}$ и следует справедливость теоремы 2.

5. *Примеры инфинитезимальных производящих операторов*

В дальнейшем нам потребуется определенный для любого $n > 0$ оператор

$$J_n = (I - n^{-1}A)^{-1} = nR(n;\ A), \tag{1}$$

для которого, очевидно, выполняется условие

$$AJ_n = n(J_n - I). \tag{2}$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу операторов вида $(T_t x)(s) = x(t+s)$, определенных на пространстве $C[0, \infty]$. Полагая

$$y_n(s) = (J_n x)(s) = n\int_0^\infty e^{-nt} x(t+s)\,dt = n\int_s^\infty e^{-n(t-s)} x(t)\,dt,$$

получаем

$$y_n'(s) = -ne^{-n(s-s)} x(s) + n^2\int_s^\infty e^{-n(t-s)} x(t)\,dt = -nx(s) + ny_n(s).$$