следующим образом. Для любого положительного рационального числа t_n имеем $T_t x(t_n) = T_t T_{t_n} x_0 = x(t + t_n)$. Отсюда на основании сильной непрерывности функции $x(t)$ при $t > 0$, которая была доказана выше, мы заключаем, что $s\text{-}\lim\limits_{t \downarrow 0} T_t x(t_n) = x(t_n)$. Каждое значение $x_m \in M$ представляет собой некоторую конечную линейную комбинацию элементов вида $x(t_n)$, и поэтому $s\text{-}\lim\limits_{t \downarrow 0} T_t x_m = x_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Но, с другой стороны, для любого значения $t \in [0, 1]$

$$\|x(t) - x_0\| \leqslant \|T_t x_m - x_m\| + \|x_m - x_0\| + \|T_t(x_0 - x_m)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|T_t x_m - x_m\| + \|x_m - x_0\| + \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|T_t\| \cdot \|x_0 - x_m\|.$$

Следовательно, $\overline{\lim\limits_{t \downarrow 0}} \|x(t) - x_0\| \leqslant \left(1 + \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|T_t\|\right) \cdot \|x_m - x_0\|$, так что $s\text{-}\lim\limits_{t \downarrow 0} x(t) = x_0$, поскольку $\inf\limits_{x_m \in M} \|x_0 - x_m\| = 0$.

2. Равностепенно непрерывные полугруппы класса (C_0) в локально выпуклых пространствах. Примеры полугрупп

Мы перейдем теперь к изучению полугрупп в общих локально выпуклых пространствах.

Определение. Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство и $\{T_t\}$, $t \geqslant 0$, $T_t \in L(X, X)$, — однопараметрическое семейство операторов, для которого выполняются следующие требования:

$$T_t T_s = T_{t+s}, \quad T_0 = I, \tag{1}$$

$$\lim_{t \to t_0} T_t x = T_{t_0} x \quad \text{для всех} \quad t_0 \geqslant 0 \quad \text{и любого } x \in X, \tag{2}$$

семейство $\{T_t\}$ *равностепенно непрерывно* (последнее условие означает, что для всякой непрерывной на пространстве X полунормы $p(x)$ существует непрерывная полунорма $q(x)$, такая, что $p(T_t x) \leqslant q(x)$ для всех значений $t \geqslant 0$ и всех элементов $x \in X$). (3)

В этом случае мы будем говорить, что в локально выпуклом пространстве X определена *равностепенно непрерывная полугруппа класса* (C_0).

Полугруппы $\{T_t\}$, удовлетворяющие условиям (1′), (3), (4) и (6) предыдущего параграфа представляют собой пример равностепенно непрерывных полугрупп класса (C_0).

Приведем теперь примеры конкретных полугрупп.

Пример 1. Возьмем пространство $C[0, \infty]$ ограниченных и равномерно непрерывных вещественных (или комплексных) функций $x(s)$, заданных в промежутке $[0, \infty)$. Определим на $C[0, \infty]$ с помощью формулы

$$(T_t x)(s) = x(t+s)$$

операторы T_t, $t \geqslant 0$. Условие (1) здесь, очевидно, выполняется. Свойство (2) вытекает из равномерной непрерывности функций $x(s)$. Наконец, $\|T_t\| \leqslant 1$, так что $\{T_t\}$ — это сжимающая полугруппа класса (C_0), и условие (3), очевидно, выполняется. В этом примере можно заменить $C[0, \infty]$ пространством $C[-\infty, \infty]$ или $L^p(-\infty, \infty)$.

Пример 2. Возьмем пространство $C[-\infty, \infty]$. Рассмотрим гауссовскую плотность вероятностей

$$N_t(u) = (2\pi t)^{-1/2} e^{-u^2/2t}, \qquad -\infty < u < \infty, \quad t > 0.$$

Определим операторы T_t, $t \geqslant 0$, отображающие пространство $C[-\infty, \infty]$ в себя:

$$(T_t x)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} N_t(s-u)\, x(u)\, du \quad \text{при} \quad t > 0,$$

$$(T_t x)(s) = x(s) \qquad \text{при} \quad t = 0.$$

Каждый оператор T_t непрерывен, так как $\int_{-\infty}^{\infty} N_t(s-u)\, du = 1$, и поэтому

$$\|T_t x\| \leqslant \|x\| \cdot \int_{-\infty}^{\infty} N_t(s-u)\, du = \|x\|.$$

По определению $T_0 = I$, а полугрупповое свойство $T_t T_s = T_{t+s}$ следует из известной формулы теории гауссовских случайных величин:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(t+t')}} e^{-u^2/2(t+t')} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t'}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u-v)^2/2t} \cdot e^{-v^2/2t'}\, dv.$$

Эту формулу можно вывести, применяя преобразование Фурье и используя формулы (10) и (13) гл. VI, § 1. Чтобы убедиться в сильной непрерывности функции T_t по переменной t, заметим, что

$$x(s) = \int_{-\infty}^{\infty} N_t(s-u)\, x(s)\, du.$$

Поэтому

$$(T_t x)(s) - x(s) = \int_{-\infty}^{\infty} N_t(s-u)(x(u) - x(s))\, du,$$

а это выражение заменой переменной $(s-u)/\sqrt{t}=z$ приводится к интегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_1(z)\bigl(x(s-\sqrt{t}\,z)-x(s)\bigr)\,dz \qquad (N_1=N_t|_{t=1}).$$

Так как функция $x(s)$ равномерно непрерывна в промежутке $(-\infty, \infty)$, для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, такое, что $|x(s_1)-x(s_2)|\leqslant\varepsilon$ при условии $|s_1-s_2|\leqslant\delta$. Разбивая написанный выше интеграл на слагаемые, мы приходим к неравенству

$$|(T_tx)(s)-x(s)|\leqslant \int\limits_{|\sqrt{t}\cdot z|\leqslant\delta} N_1(z)\,|x(s-\sqrt{t}\cdot z)-x(s)|\,dz+$$
$$+\int\limits_{|\sqrt{t}\cdot z|>\delta} N_1(z)\,|x(s-\sqrt{t}\cdot z)-x(s)|\,dz\leqslant\varepsilon\int\limits_{|\sqrt{t}\cdot z|\leqslant\delta} N_1(z)\,dz+$$
$$+2\|x\|\int\limits_{|\sqrt{t}\cdot z|>\delta} N_1(z)\,dz\leqslant\varepsilon+2\|x\|\int\limits_{|\sqrt{t}\cdot z|>\delta} N_1(z)\,dz.$$

Второй член в правой части этой суммы стремится к нулю при $t\to 0$, так как интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} N_1(z)\,dz$ сходится. Таким образом, $\limsup\limits_{t\downarrow 0}\ \sup\limits_{s}|(T_tx)(s)-x(s)|=0$ и, следовательно, $s\text{-}\lim\limits_{t\downarrow 0} T_tx=x$. Тем самым, учитывая теорему предыдущего параграфа, мы доказали равенство (2).

В этом примере можно заменить пространство $C[-\infty, \infty]$ на $L^p(-\infty, \infty)$. Рассмотрим случай пространства $L^1(-\infty, \infty)$. Тогда по теореме Фубини

$$\|T_tx\|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} N_t(s-u)\,|x(u)|\,ds\,du\leqslant\|x\|.$$

Сильная непрерывность доказывается так же, как в предыдущем примере:

$$\|T_tx-x\|=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} N_1(z)\bigl(x(s-\sqrt{t}\cdot z)-x(s)\bigr)\,dz\right|ds\leqslant$$
$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty} N_1(z)\left[\int_{-\infty}^{\infty}|x(s-\sqrt{t}\cdot z)-x(s)|\,ds\right]dz\leqslant$$
$$\leqslant 2\int_{-\infty}^{\infty} N_1(z)\,dz\cdot\|x\|.$$

Отсюда по лемме Лебега — Фату

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\,\|T_t x - x\| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} N_1(z)\left(\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\int_{-\infty}^{\infty} |x(s-\sqrt{t}\cdot z) - x(s)|\,ds\right)dz = 0,$$

так как интеграл Лебега непрерывен по параметру в смысле сходимости в среднем — это легко показать, аппроксимируя $x(s)$ простыми функциями.

Пример 3. Рассмотрим пространство $C[-\infty, \infty]$. Пусть $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Определим равенством

$$(T_t x)(s) = e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\,x(s-k\mu)$$

операторы T_t, $t \geqslant 0$, отображающие пространство $C[-\infty, \infty]$ в себя. Тогда

$$(T_w(T_t x))(s) = e^{-\lambda w}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda w)^m}{m!}\left[e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\,x(s-k\mu-m\mu)\right] =$$

$$= e^{-\lambda(w+t)}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\left[p!\sum_{m=0}^{p}\frac{(\lambda w)^m}{m!}\,\frac{(\lambda t)^{p-m}}{(p-m)!}\,x(s-p\mu)\right] =$$

$$= e^{-\lambda(w+t)}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}(\lambda w + \lambda t)^p\,x(s-p\mu) = (T_{w+t}x)(s),$$

т. е. полугрупповое свойство имеет место. Нетрудно также убедиться в том, что определенные здесь операторы T_t образуют сжимающую полугруппу класса (C_0).

3. *Инфинитезимальный производящий оператор равностепенно непрерывной полугруппы класса (C_0)*

Пусть равностепенно непрерывная полугруппа $\{T_t;\, t\geqslant 0\}$ класса (C_0) определена на локально выпуклом линейном топологическом пространстве X. Предположим, что X — *секвенциально полное* пространство. *Инфинитезимальный производящий оператор* A полугруппы $\{T_t\}$ мы определим как предел

$$Ax = \lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T_h - I)\,x. \qquad (1)$$

Таким образом, A — линейный оператор с областью определения

$$D(A) = \left\{x \in X;\ \lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T_h - I)\,x \quad \text{существует в } X\right\},$$

и $Ax = \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(T_h - I)x$ для $x \in D(A)$. Множество $D(A)$ не пусто, поскольку вектор $x = 0$ во всяком случае принадлежит $D(A)$. В действительности же область $D(A)$ существенно шире. Имеет место следующая

Теорема 1. Множество $D(A)$ плотно в пространстве X.

Доказательство. Положим $\varphi_n(s) = ne^{-ns}$, $n > 0$. Рассмотрим умноженное на *n преобразование Лапласа* функции T_s

$$C_{\varphi_n}x = \int_0^\infty \varphi_n(s) T_s x \, ds \quad \text{для} \quad x \in X, \tag{2}$$

где интеграл понимается в смысле Римана. Обычная конструкция интеграла Римана от числовых функций может быть перенесена на функции со значениями из локально выпуклого секвенциально полного пространства X, если вместо абсолютной величины числа использовать определенные на X непрерывные полунормы p.

Сходимость несобственного интеграла следует из равностепенной непрерывности полугруппы T_t, соотношения

$$p(\varphi_n(s) T_s x) = ne^{-ns} p(T_s x)$$

и секвенциальной полноты пространства X.

Из неравенства

$$p(C_{\varphi_n}x) \leqslant \int_0^\infty ne^{-ns} p(T_s x)\, ds \leqslant \sup_{s \geqslant 0} p(T_s x)$$

можно заключить, что C_{φ_n} — это непрерывный линейный оператор, принадлежащий $L(X, X)$. Покажем, что

$$R(C_{\varphi_n}) \subseteq D(A) \quad \text{для любого} \quad n > 0 \tag{3}$$

и

$$\lim_{n \to \infty} C_{\varphi_n}x = x \quad \text{при всех} \quad x \in X. \tag{4}$$

Из этого, очевидно, будет следовать, что множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} R(C_{\varphi_n})$ и тем более область $D(A)$ плотны в X.

Для доказательства утверждения (3) мы используем формулу

$$h^{-1}(T_h - I) C_{\varphi_n}x = h^{-1} \int_0^\infty \varphi_n(s) T_h T_s x \, ds - h^{-1} \int_0^\infty \varphi_n(s) T_s x \, ds.$$

Линейность и непрерывность оператора T_h позволяют изменять порядок операций в форме $T_h \int_0^\infty \ldots = \int_0^\infty T_h \ldots$, поэтому

$$h^{-1}(T_h - I) C_{\varphi_n} x = h^{-1} \int_0^\infty \varphi_n(s) T_{s+h} x \, ds - h^{-1} \int_0^\infty \varphi_n(s) T_s x \, ds =$$

$$= \frac{e^{nh}-1}{h} n \int_h^\infty e^{-n\sigma} T_\sigma x \, d\sigma - \frac{1}{h} n \int_0^h e^{-ns} T_s x \, ds =$$

$$= \frac{e^{nh}-1}{h} \left\{ C_{\varphi_n} x - \int_0^h n e^{-n\sigma} T_\sigma x \, d\sigma \right\} - \frac{1}{h} \int_0^h \varphi_n(s) T_s x \, ds.$$

Выражение $\varphi_n(s) T_s x$ непрерывно по s, значит второе слагаемое в правой части последнего выражения стремится к $-\varphi_n(0) T_0 x = -nx$ при $h \downarrow 0$. Эти же соображения показывают, что первое слагаемое в правой части стремится к $nC_{\varphi_n} x$ при $h \downarrow 0$. Следовательно, $C_{\varphi_n} x$ принадлежит $D(A)$ и

$$A C_{\varphi_n} x = n\left(C_{\varphi_n} - I\right) x, \qquad x \in X. \tag{5}$$

Теперь выведем формулу (4). Так как $\int_0^\infty n e^{-ns} \, ds = 1$, то

$$C_{\varphi_n} x - x = n \int_0^\infty e^{-ns} (T_s x - x) \, ds,$$

$$p\left(C_{\varphi_n} x - x\right) \leqslant n \int_0^\infty e^{-ns} p(T_s x - x) \, ds = n \int_0^\delta \ldots + n \int_\delta^\infty \ldots = J_1 + J_2,$$

где $\delta > 0$ — произвольное положительное число. Для любого $\varepsilon > 0$ мы, поскольку функция $T_s x$ непрерывна по s, можем выбрать $\delta > 0$, такое, что $p(T_s x - x) \leqslant \varepsilon$ при $0 \leqslant s \leqslant \delta$. Поэтому

$$J_1 \leqslant \varepsilon n \int_0^\delta e^{-ns} \, ds \leqslant \varepsilon n \int_0^\infty e^{-ns} \, ds = \varepsilon.$$

При фиксированном значении $\delta > 0$

$$J_2 \leqslant n \int_\delta^\infty e^{-ns} (p(T_s x) + p(x)) \, ds \to 0 \quad \text{при} \quad n \uparrow \infty,$$

так как множество $\{T_s x\}$ равномерно ограничено при $s \geqslant 0$. Отсюда и вытекает справедливость соотношения (4).

Определение. Определим для полугруппы операцию дифференцирования D_t формулой

$$D_t T_t x = \lim_{h \to 0} h^{-1} (T_{t+h} - T_t) x,$$

имея в виду те значения $x \in X$, при которых предел, написанный в правой части, существует.

Теорема 2. Если $x \in D(A)$, то $x \in D(D_t T_t)$ и

$$D_t T_t x = A T_t x = T_t A x, \qquad t \geqslant 0. \tag{7}$$

Таким образом, оператор A перестановочен с оператором T_t, или, как говорят, операторы A и T_t *коммутируют* друг с другом.

Доказательство. Если $x \in D(A)$, то, поскольку оператор T_t непрерывен,

$$T_t A x = T_t \lim_{h \downarrow 0} h^{-1} (T_h - I) x = \lim_{h \downarrow 0} h^{-1} (T_t T_h - T_t) x =$$

$$= \lim_{h \downarrow 0} h^{-1} (T_{t+h} - T_t) x = \lim_{h \downarrow 0} h^{-1} (T_h - I) T_t x = A T_t x.$$

Следовательно, если $x \in D(A)$, то $T_t x \in D(A)$ и $T_t A x = A T_t x = \lim_{h \downarrow 0} h^{-1} (T_{t+h} - T_t) x$. Мы, таким образом, показали, что правая производная от $T_t x$ (в смысле определения (6)) существует при всех $x \in D(A)$. Теперь мы убедимся в том, что и левая производная тоже существует и совпадает с правой производной.

С этой целью выберем произвольный функционал $f_0 \in X'$. Тогда из приведенных выше рассуждений следует, что при всяком фиксированном значении x числовая функция $f_0(T_t x) = \langle T_t x, f_0 \rangle$ непрерывна по t при $t \geqslant 0$ и обладает правой производной $d^+ f_0(T_t x)/dt$, равной значению $f_0(A T_t x) = f_0(T_t A x)$. Отсюда мы заключаем, что производная $d^+ f_0(T_t x)/dt$ непрерывна по t. Ниже доказывается известная

Лемма. Если хотя бы одно из производных чисел

$$\overline{D}^+ f(t), \quad \underline{D}^+ f(t), \quad \overline{D}^- f(t) \quad \text{или} \quad \underline{D}^- f(t)$$

непрерывной вещественной функции $f(t)$ является конечной непрерывной функцией от t, то $f(t)$ дифференцируема и ее производная непрерывна и совпадает со значениями $\overline{\underline{D}}^{\pm} f(t)$.

Применяя эту лемму, мы видим, что функция $f_0(T_t x)$ дифференцируема по t и

$$f_0(T_t x - x) = f_0(T_t x) - f_0(T_0 x) = \int_0^t (d^+ f_0(T_s x)/ds) ds =$$

$$= \int_0^t f_0(T_s A x)\, ds = f_0\left(\int_0^t T_s A x\, ds \right).$$

Так как функционал $f_0 \in X'$ был взят совершенно произвольно, то отсюда вытекает, что

$$T_t x - x = \int_0^t T_s A x\, ds \quad \text{для каждого } x \in D(A).$$

Функция $T_s A x$ непрерывна по s, и поэтому последнее равенство означает, что выражение $T_t x$ дифференцируемо по t в топологии пространства X и

$$D_t T_t x = \lim_{h \to 0} h^{-1} \int_t^{t+h} T_s A x\, ds = T_t A x.$$

Утверждение (7) тем самым доказано.

Доказательство леммы. Покажем вначале, что условие $\overline{D}^+ f(t) \geqslant 0$ при $a \leqslant t \leqslant b$ влечет за собой неравенство $f(b) - f(a) \geqslant 0$. Допустим противное, пусть $f(b) - f(a) < -\varepsilon(b-a)$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое фиксированное положительное число. Тогда для функции $g(t) = f(t) - f(a) + \varepsilon(t-a)$ справедливо неравенство $\overline{D}^+ g(a) = \overline{D}^+ f(a) + \varepsilon > 0$, а так как $g(a) = 0$, то при некотором значении $t_0 > a$, лежащем вблизи точки a, $g(t_0) > 0$. Поскольку функция $g(t)$ непрерывна и $g(b) < 0$, найдется такое значение t_1 $(a < t_0 < t_1 < b)$, что $g(t_1) = 0$ и $g(t) < 0$ при $t_1 < t < b$. Значит, $\overline{D}^+ g(t_1) \leqslant 0$, что противоречит условию $\overline{D}^+ g(t_1) = \overline{D}^+ f(t_1) + \varepsilon > 0$.

Применяя далее аналогичные рассуждения к функциям вида $f(t) - \alpha t$ и $\beta t - f(t)$, мы приходим к следующему заключению: если одно из выражений $\overline{\underline{D}}^{\pm} f(t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\alpha \leqslant \overline{\underline{D}}^{\pm} f(t) \leqslant \beta \text{ на некотором сегменте } [t_1, t_2],$$

то $\alpha \leqslant (f(t_2) - f(t_1))/(t_2 - t_1) \leqslant \beta$. Следовательно, точные верхние и нижние грани функций $\overline{\underline{D}}^{\pm} f(t)$ на любом отрезке вида $[t_1, t_2]$ одинаковы. Это и приводит к заключению о том, что если для непрерывной вещественной функции $f(t)$ хотя бы одно из четырех выражений $\overline{\underline{D}}^{\pm} f(t)$ непрерывно на сегменте $[t_1, t_2]$, то все четыре производных числа совпадают и равны производной $f'(t)$, что и требовалось доказать.

4. Резольвента инфинитезимального производящего оператора A

Теорема 1. Оператор $(nI - A)$ при значениях $n > 0$ обладает обратным оператором $R(n; A) = (nI - A)^{-1} \in L(X, X)$, и

$$R(n; A)\, x = \int_0^\infty e^{-ns} T_s x\, ds \quad \text{при всех} \quad x \in X. \tag{1}$$

Иными словами, все вещественные положительные числа принадлежат резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A.

Доказательство. Убедимся сначала в том, что оператор $(nI-A)^{-1}$ существует. Для этого допустим, что имеется такой элемент $x_0 \neq 0$, что $(nI-A)x_0=0$, т. е. $Ax_0=nx_0$. Возьмем непрерывный линейный функционал $f_0 \in X'$, такой, что $f_0(x_0)=1$, и положим $\varphi(t)=f_0(T_t x_0)$. По теореме 2 предыдущего параграфа функция $\varphi(t)$ дифференцируема, так как по предположению $x_0 \in D(A)$, и

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=f_0(D_t T_t x_0)=f_0(T_t A x_0)=f_0(T_t n x_0)=n\varphi(t).$$

Если мы решим это дифференциальное уравнение при начальном условии $\varphi(0)=f_0(x_0)=1$, то получим $\varphi(t)=e^{nt}$. Но функция $\varphi(t)=f_0(T_t x_0)$ ограничена по t, так как выражение $T_t x_0$ равномерно ограничено при $t \geqslant 0$, а функционал f_0 непрерывен. Полученное противоречие показывает, что обратный оператор $(nI-A)^{-1}$ должен существовать.

По формуле (5) предыдущего параграфа $AC_{\varphi_n}x=n(C_{\varphi_n}-I)x$, и поэтому $(nI-A)C_{\varphi_n}x=nx$ для всех $x \in X$. Оператор $(nI-A)$ отображает, таким образом, область $R(C_{\varphi_n}) \subseteq D(A)$ на все пространство X взаимно однозначно. Поэтому тем более этот оператор отображает множество $D(A)$ на пространство X однозначно в обе стороны, так как обратный оператор $(nI-A)^{-1}$, как было показано, существует. Следовательно, $R(C_{\varphi_n})=D(A)$ и $(nI-A)^{-1}=n^{-1}C_{\varphi_n}$. Теорема доказана.

Следствие 1. Правая полуплоскость комплексной λ-плоскости является резольвентным множеством $\rho(A)$ оператора A, и

$$R(\lambda;\, A)x=(\lambda I-A)^{-1}x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t x\,dt$$

$$\text{при}\quad \operatorname{Re}(\lambda)>0 \quad \text{и любом} \quad x \in X. \tag{2}$$

Доказательство. При фиксированном вещественном значении τ операторы $\{e^{-i\tau t}T_t;\ t \geqslant 0\}$ образуют равностепенно непрерывную полугруппу класса (C_0). Инфинитезимальный производящий оператор этой полугруппы, как нетрудно заметить, равен $(A-i\tau I)$. Поэтому для любого $\sigma>0$ резольвента $R(\sigma+i\tau;\, A)=((\sigma+i\tau)I-A)^{-1}$ существует и

$$R((\sigma+i\tau)I-A)x=\int_0^\infty e^{-(\sigma+i\tau)s}T_s x\,ds \quad \text{при всех} \quad x \in X. \tag{2'}$$

Следствие 2. Имеют место следующие утверждения:

$$D(A) = R\left((\lambda I - A)^{-1}\right) = R(R(\lambda;\ A)) \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}(\lambda) > 0, \tag{3}$$

$$AR(\lambda;\ A)x = R(\lambda;\ A)Ax = (\lambda R(\lambda;\ A) - I)x \quad \text{при} \quad x \in D(A), \tag{4}$$

$$AR(\lambda;\ A)x = (\lambda R(\lambda;\ A) - I)x \quad \text{для всех} \quad x \in X, \tag{5}$$

$$\lim_{\lambda \uparrow \infty} \lambda R(\lambda;\ A)x = x \quad \text{при} \quad x \in X. \tag{6}$$

Доказательство. Эти утверждения с очевидностью вытекают из условия (4) предыдущего параграфа и определения резольвенты $R(\lambda;\ A) \equiv (\lambda I - A)^{-1}$.

Следствие 3. Инфинитезимальный производящий оператор A обладает следующим свойством:

$$\text{если } x_h \in D(A) \quad \text{и} \quad \lim_{h \to \infty} x_h = x \in X, \quad \lim_{h \to \infty} Ax_h = y \in X,$$
$$\text{то } x \in D(A) \quad \text{и} \quad Ax = y.$$

В этом смысле оператор A можно назвать замкнутым оператором (ср. гл. II, § 6).

Доказательство. Положим $(I - A)x_h = z_h$. Тогда $\lim_{h \to \infty} z_h = x - y$. Отсюда, вследствие непрерывности оператора $(I - A)^{-1}$,

$$\lim_{h \to \infty} (I - A)^{-1} z_h = (I - A)^{-1}(x - y),$$

т. е. $x = (I - A)^{-1}(x - y)$, $(I - A)x = x - y$. Это и показывает, что $y = Ax$.

Теорема 2. Семейство операторов

$$\{(\lambda R(\lambda;\ A))^n\} \tag{7}$$

равностепенно непрерывно относительно значений $\lambda > 0$ и $n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Из резольвентного уравнения (гл. VIII, § 2, (2))

$$R(\mu;\ A) - R(\lambda;\ A) = (\lambda - \mu)R(\mu;\ A)R(\lambda;\ A),$$

учитывая, что, как показывает условие (2), $\lim_{\mu \to \lambda} R(\mu;\ A)y = R(\lambda;\ A)y$ $(y \in X)$, мы получаем

$$\lim_{\mu \to \lambda} (\mu - \lambda)^{-1}(R(\mu;\ A) - R(\lambda;\ A))x =$$
$$= dR(\lambda;\ A)x/d\lambda = -R(\lambda;\ A)^2 x, \quad x \in X.$$

Следовательно, резольвента $R(\lambda;\ A)x$ бесконечно дифференцируема по λ при $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ и

$$d^n R(\lambda;\ A)x/d\lambda^n = (-1)^n n!\, R(\lambda;\ A)^{n+1} x \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

С другой стороны, дифференцируя равенство (2) n раз по λ, мы видим, что

$$d^n R(\lambda;\ A)\,x/d\lambda^n = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(-t)^n T_t x\,dt. \tag{9}$$

Дифференцирование под знаком интеграла в (9) оправдано, так как семейство $\{T_t x\}$ равномерно ограничено по t и $\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n\,dt = (n!)/\lambda^{n+1}$ при $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. Таким образом,

$$(\lambda R(\lambda;\ A))^{n+1} x = \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n T_t x\,dt$$

$$\text{для всех } x \in X \text{ и } \mathrm{Re}(\lambda) > 0, \tag{10}$$

и поэтому для всякой непрерывной на X полунормы p и произвольных $\lambda > 0$, $n > 0$

$$p\left((\lambda R(\lambda;\ A))^{n+1} x\right) \leqslant \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n\,dt \cdot \sup_{t\geqslant 0} p(T_t x) = \sup_{t\geqslant 0} p(T_t x). \tag{11}$$

Отсюда ввиду равностепенной непрерывности семейства $\{T_t\}$ и следует справедливость теоремы 2.

5. Примеры инфинитезимальных производящих операторов

В дальнейшем нам потребуется определенный для любого $n > 0$ оператор

$$J_n = (I - n^{-1}A)^{-1} = nR(n;\ A), \tag{1}$$

для которого, очевидно, выполняется условие

$$AJ_n = n(J_n - I). \tag{2}$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу операторов вида $(T_t x)(s) = x(t+s)$, определенных на пространстве $C[0, \infty]$. Полагая

$$y_n(s) = (J_n x)(s) = n\int_0^\infty e^{-nt} x(t+s)\,dt = n\int_s^\infty e^{-n(t-s)} x(t)\,dt,$$

получаем

$$y_n'(s) = -ne^{-n(s-s)} x(s) + n^2\int_s^\infty e^{-n(t-s)} x(t)\,dt = -nx(s) + ny_n(s).$$

Сравнивая полученное равенство с общей формулой (2)

$$(AJ_n x)(s) = n((J_n - I)x)(s),$$

мы находим, что $Ay_n(s) = y'_n(s)$. Поскольку $R(J_n) = R(R(n; A)) = D(A)$, отсюда следует, что

$$Ay(s) = y'(s) \quad \text{при любом} \quad y \in D(A).$$

Обратно, пусть теперь обе функции $y(s)$ и $y'(s)$ принадлежат пространству $C[0, \infty]$. Покажем, что $y \in D(A)$ и $Ay(s) = y'(s)$. С этой целью определим с помощью соотношения

$$y'(s) - ny(s) = -nx(s)$$

вспомогательную функцию $x(s)$. Полагая $(J_n x)(s) = y_n(s)$, мы, согласно полученным выше результатам, получим равенство

$$y'_n(s) - ny_n(s) = -nx(s).$$

Значит, функция $w(s) = y(s) - y_n(s)$ удовлетворяет уравнению $w'(s) = nw(s)$, и поэтому $w(s) = Ce^{ns}$. Но функция w должна принадлежать $C[0, \infty]$, а это может быть только при значении $C = 0$. Следовательно, $y(s) = y_n(s) \in D(A)$ и $Ay(s) = y'(s)$.

Таким образом, область определения $D(A)$ оператора A совпадает с множеством всех функций $y \in C[0, \infty]$, первые производные которых также принадлежат пространству $C[0, \infty]$, и для таких функций $Ay = y'$. Это означает, что дифференциальный оператор d/ds представляет собой инфинитезимальный производящий оператор полугруппы заданных на функциональном пространстве $C[0, \infty]$ операторов сдвига по аргументу t.

Пример 2. Мы покажем сейчас, что оператор двукратного дифференцирования d^2/ds^2 является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы интегральных операторов с гауссовским ядром. Рассмотрим пространство $C[-\infty, \infty]$ и определим следующим образом операторы T_t:

$$(T_t x)(s) = (2\pi t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s-v)^2/2t} x(v)\, dv \quad \text{при} \quad t > 0,$$

$$(T_t x)(s) = x(s), \text{ когда } t = 0.$$

Вводя переменную σ по формуле $t = \sigma^2/n$, мы находим

$$y_n(s) = (J_n x)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(v) \left[\int_0^{\infty} n(2\pi t)^{-1/2} e^{-nt-(s-v)^2/2t}\, dt \right] dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(v) \left[2\sqrt{n} \int_0^{\infty} (2\pi)^{-1/2} e^{-\sigma^2 - n(s-v)^2/2\sigma^2}\, d\sigma \right] dv.$$

Воспользовавшись формулой

$$\int_0^\infty e^{-(\sigma^2+c/\sigma^2)}\,d\sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2c}, \quad c=\sqrt{n}|s-v|/\sqrt{2}>0, \tag{3}$$

вывод которой мы приведем позже, получаем

$$y_n(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(v)(n/2)^{1/2}e^{-\sqrt{2n}\,|s-v|}\,dv.$$

Так как функция $x(v)$ по предположению непрерывна и ограничена, мы можем дважды продифференцировать $y_n(s)$ под знаком интеграла:

$$y_n'(s)=n\int_s^\infty x(v)e^{-\sqrt{2n}(v-s)}\,dv - n\int_{-\infty}^s x(v)e^{-\sqrt{2n}(s-v)}\,dv,$$

$$y_n''(s)=n\left\{-x(s)-x(s)+\sqrt{2}\sqrt{n}\int_s^\infty x(v)e^{-\sqrt{2n}(s-v)}\,dv+\right.$$

$$\left.+\sqrt{2}\sqrt{n}\int_{-\infty}^s x(v)e^{-\sqrt{2n}(s-v)}\,dv\right\}=-2nx(s)+2ny_n(s).$$

Сравнивая полученные выражения с общей формулой (2)

$$(Ay_n)(s)=(AJ_nx)(s)=n((J_n-I)x)(s)=n(y_n(s)-x(s)),$$

мы находим, что $Ay_n(s)=y_n''(s)/2$. Таким образом, поскольку $R(J_n)=R(R(n;\,A))=D(A)$, мы доказали, что $Ay(s)=y''(s)/2$ для всякой функции $y\in D(A)$. Обратно, допустим теперь, что функция $y(s)$ и ее вторая производная $y''(s)$ принадлежат пространству $C[-\infty,\infty]$. Введем вспомогательную функцию $x(s)$:

$$y''(s)-2ny(s)=-2nx(s).$$

Полагая $y_n(s)=(J_nx)(s)$, мы, как показано выше, получаем

$$y_n''(s)-2ny_n(s)=-2nx(s).$$

Тогда функция $w(s)=y(s)-y_n(s)$ удовлетворяет уравнению $w''(s)-2nw(s)=0$, и поэтому $w(s)=C_1e^{\sqrt{2n}\,s}+C_2e^{-\sqrt{2n}\,s}$. Функция $w(s)$ по предположению должна быть ограниченной в промежутке $(-\infty,\infty)$, а это возможно только в том случае, когда C_1 и C_2 равны нулю. Отсюда вытекает, что $y(s)=y_n(s)$, и поэтому $y\in D(A)$, $(Ay)(s)=y''(s)/2$.

Итак, *дифференциальный оператор* $\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}$ представляет собой инфинитезимальный производящий оператор полугруппы определенных на функциональном пространстве $C[-\infty, \infty]$ интегральных операторов с ядром типа плотности вероятности гауссовского распределения.

Вывод формулы (3). Известно, что

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2.$$

Введем в этот интеграл новую переменную интегрирования σ. $x = \sigma - c/\sigma$. Тогда получится соотношение

$$\sqrt{\pi}/2 = \int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-(\sigma - c/\sigma)^2}(1 + c/\sigma^2)\,d\sigma = e^{2c}\int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-(\sigma^2 + c^2/\sigma^2)}(1 + c/\sigma^2)\,d\sigma =$$

$$= e^{2c}\left\{\int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-(\sigma^2+c^2/\sigma^2)}\,d\sigma + \int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-(\sigma^2+c^2/\sigma^2)}\cdot\frac{c}{\sigma^2}\,d\sigma\right\}.$$

Полагая в последнем интеграле $\sigma = c/t$, мы и находим, что

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = e^{2c}\left\{\int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-(\sigma^2+c^2/\sigma^2)}\,d\sigma - \int_{\sqrt{c}}^0 e^{-(c^2/t^2+t^2)}\,dt\right\} = e^{2c}\int_0^\infty e^{-(t^2+c^2/t^2)}\,dt.$$

Упражнение. Показать, что для полугруппы $\{T_t\}$ определенных на пространстве $C[-\infty, \infty]$ операторов

$$(T_t x)(s) = e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!}\,x(s - k\mu) \qquad (\lambda,\ \mu > 0)$$

инфинитезимальным производящим оператором служит оператор A вида

$$(Ax)(s) = \lambda\,\{x(s-\mu) - x(s)\},$$

который называется *разностным оператором.*

6. Показательная функция непрерывного линейного оператора, степени которого равностепенно непрерывны

Предложение. Рассмотрим локально выпуклое секвенциально полное линейное топологическое пространство X. Пусть линейный оператор $B \in L(X, X)$, и предположим, что степени этого оператора, образующие семейство $\{B^k;\ k = 1, 2, \ldots\}$, равностепенно непрерывны. Тогда для каждого элемента $x \in X$ ряд

$$\sum_{k=0}^\infty (k!)^{-1}(tB)^k x \qquad (t \geqslant 0) \tag{1}$$

сходится.

Доказательство. Для всякой непрерывной на X полунормы p, согласно допущениям, сделанным относительно свойств операторов B^k,