на функциональном пространстве $C[-\infty, \infty]$ интегральных операторов с ядром типа плотности вероятности гауссовского распределения.

Вывод формулы (3). Известно, что

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2.$$

Введем в этот интеграл новую переменную интегрирования σ. $x = \sigma - c/\sigma$. Тогда получится соотношение

$$\sqrt{\pi}/2 = \int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-(\sigma - c/\sigma)^2}(1 + c/\sigma^2)\,d\sigma = e^{2c}\int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-(\sigma^2 + c^2/\sigma^2)}(1 + c/\sigma^2)\,d\sigma =$$

$$= e^{2c}\left\{\int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-(\sigma^2 + c^2/\sigma^2)}\,d\sigma + \int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-(\sigma^2 + c^2/\sigma^2)}\cdot\frac{c}{\sigma^2}\,d\sigma\right\}.$$

Полагая в последнем интеграле $\sigma = c/t$, мы и находим, что

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = e^{2c}\left\{\int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-(\sigma^2 + c^2/\sigma^2)}\,d\sigma - \int_{\sqrt{c}}^0 e^{-(c^2/t^2 + t^2)}\,dt\right\} = e^{2c}\int_0^\infty e^{-(t^2 + c^2/t^2)}\,dt.$$

Упражнение. Показать, что для полугруппы $\{T_t\}$ определенных на пространстве $C[-\infty, \infty]$ операторов

$$(T_t x)(s) = e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!}\,x(s - k\mu) \qquad (\lambda,\ \mu > 0)$$

инфинитезимальным производящим оператором служит оператор A вида

$$(Ax)(s) = \lambda\,\{x(s - \mu) - x(s)\},$$

который называется *разностным оператором.*

6. Показательная функция непрерывного линейного оператора, степени которого равностепенно непрерывны

Предложение. Рассмотрим локально выпуклое секвенциально полное линейное топологическое пространство X. Пусть линейный оператор $B \in L(X, X)$, и предположим, что степени этого оператора, образующие семейство $\{B^k;\ k = 1, 2, \ldots\}$, равностепенно непрерывны. Тогда для каждого элемента $x \in X$ ряд

$$\sum_{k=0}^\infty (k!)^{-1}(tB)^k x \qquad (t \geqslant 0) \tag{1}$$

сходится.

Доказательство. Для всякой непрерывной на X полунормы p, согласно допущениям, сделанным относительно свойств операторов B^k, существует непрерывная определенная на пространстве X полунорма q, такая, что

$$p(B^k x) \leqslant q(x) \text{ для всех } k > 0 \text{ и всех } x \in X.$$

Следовательно,

$$p\left(\sum_{k=n}^{m} (tB)^k x/k!\right) \leqslant \sum_{k=n}^{m} t^k p(B^k x)/k! \leqslant q(x) \cdot \sum_{k=n}^{m} t^k/k!.$$

Таким образом, последовательность частичных сумм $\left\{\sum_{k=0}^{m} (tB)^k x/k!\right\}$ фундаментальна, а так как пространство X секвенциально полно по предположению, то эта последовательность сходится. Предел этой последовательности и представляет собой сумму ряда (1).

Следствие 1. Отображение $x \to \sum_{k=0}^{\infty} (tB)^k x/k!$ определяет при каждом значении $t \geqslant 0$ непрерывный линейный оператор. Мы обозначим этот оператор через $\exp(tB)$.

Доказательство. Используя равностепенную непрерывность семейства $\{B^k\}$, нетрудно показать, что операторы $B_n = \sum_{k=0}^{n} (tB)^k/k!$ равностепенно (относительно t) непрерывны при изменении t на любом бикомпактном множестве числовой оси. В самом деле,

$$p(B_n x) \leqslant \sum_{k=0}^{n} t^k p(B^k x)/k! \leqslant q(x) \cdot \sum_{k=0}^{n} t^k/k! \leqslant e^t \cdot q(x).$$

Поэтому и предел $\exp(tB)$ последовательности $\{B_n\}$ удовлетворяет неравенству

$$p(\exp(tB)\,x) \leqslant \exp(t) \cdot q(x) \qquad (t \geqslant 0), \tag{2}$$

а это говорит о непрерывности оператора $\exp(tB)$.

Следствие 2. Рассмотрим два оператора B и C, принадлежащих $L(X, X)$, степени которых образуют равностепенно непрерывные семейства $\{B^k\}$ и $\{C^k\}$. Пусть, кроме того, $BC = CB$. Тогда

$$\exp(tB) \cdot \exp(tC) = \exp(t(B + C)). \tag{3}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$p((B + C)^k x) \leqslant \sum_{s=0}^{k} C_k^s p(B^{k-s} C^s x) \leqslant \sum_{s=0}^{k} C_k^s q(C^s x) \leqslant 2^k \sup_{0 \leqslant s} q(C^s x).$$

Следовательно, операторы семейства $\{2^{-k}(B + C)^k\}$ равностепенно непрерывны, и поэтому можно определить функцию $\exp(t(B + C))$. Используя теперь свойство перестановочности $BC = CB$, мы можем представить ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (t(B+C))^k x/k!$$

в виде $\left(\sum_{k=0}^{\infty} (tB)^k/k!\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} (tC)^k x/k!\right)$, как и в случае обычных числовых рядов вида $\sum_{k=0}^{\infty} (t(b+c))^k/k!$.

Следствие 3. Для всякого элемента $x \in X$

$$\lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(\exp(hB)-I)x = Bx. \tag{4}$$

Поэтому, используя полугрупповое свойство

$$\exp((t+h)B) = \exp(tB)\cdot\exp(hB), \tag{5}$$

справедливость которого следует из предыдущих рассуждений, мы можем определить оператор дифференцирования

$$D_t \exp(tB)x = \exp(tB)\cdot Bx = B\exp(tB)x. \tag{6}$$

Доказательство. Как и раньше, для произвольной непрерывной на X полунормы p мы получаем неравенство

$$p\left(h^{-1}(\exp(hB)-I)x - Bx\right) \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} h^{k-1} p\left(B^k x\right)/k! \leqslant$$

$$\leqslant q(x)\cdot\sum_{k=2}^{\infty} h^{k-1}/k!,$$

где q — некоторая непрерывная полунорма. Выражение, стоящее здесь справа, стремится к нулю при $h \downarrow 0$, что и доказывает наше утверждение.

7. Представление равностепенно непрерывной полугруппы класса (C_0) с помощью соответствующего инфинитезимального производящего оператора

Докажем следующую основную теорему.

Теорема. Предположим, что локально выпуклое линейное топологическое пространство X секвенциально полно. Рассмотрим линейный оператор A с плотной в X областью определения $D(A)$ и областью значений $R(A) \subseteq X$. Допустим, что при $n = 1, 2, \ldots$ существует резольвента $R(n; A) = (nI - A)^{-1} \in L(X, X)$. Тогда, для того чтобы оператор A был инфинитезимальным производящим оператором некоторой единственным образом определенной равностепенно непрерывной полугруппы класса (C_0), необходимо и достаточно, чтобы