представить ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (t(B+C))^k x/k!$$

в виде $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} (tB)^k/k!\right)\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} (tC)^k x/k!\right)$, как и в случае обычных числовых рядов вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (t(b+c))^k/k!$.

**Следствие 3.** Для всякого элемента $x \in X$

$$\lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(\exp(hB)-I)x = Bx. \tag{4}$$

Поэтому, используя полугрупповое свойство

$$\exp((t+h)B) = \exp(tB)\cdot\exp(hB), \tag{5}$$

справедливость которого следует из предыдущих рассуждений, мы можем определить оператор дифференцирования

$$D_t \exp(tB)x = \exp(tB)\cdot Bx = B\exp(tB)x. \tag{6}$$

**Доказательство.** Как и раньше, для произвольной непрерывной на $X$ полунормы $p$ мы получаем неравенство

$$p\left(h^{-1}(\exp(hB)-I)x - Bx\right) \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} h^{k-1}p\left(B^k x\right)/k! \leqslant$$

$$\leqslant q(x)\cdot\sum_{k=2}^{\infty} h^{k-1}/k!,$$

где $q$ — некоторая непрерывная полунорма. Выражение, стоящее здесь справа, стремится к нулю при $h \downarrow 0$, что и доказывает наше утверждение.

## 7. Представление равностепенно непрерывной полугруппы класса ($C_0$) с помощью соответствующего инфинитезимального производящего оператора

Докажем следующую основную теорему.

**Теорема.** Предположим, что локально выпуклое линейное топологическое пространство $X$ секвенциально полно. Рассмотрим линейный оператор $A$ с плотной в $X$ областью определения $D(A)$ и областью значений $R(A) \subseteq X$. Допустим, что при $n = 1, 2, \ldots$ существует резольвента $R(n; A) = (nI-A)^{-1} \in L(X, X)$. Тогда, для того чтобы оператор $A$ был инфинитезимальным производящим оператором некоторой единственным образом определенной равностепенно непрерывной полугруппы класса ($C_0$), необходимо и достаточно, чтобы операторы семейства $\{(I-n^{-1}A)^{-m}\}$ были равностепенно непрерывны относительно значений $n=1, 2, \ldots$ и $m=0, 1, 2, \ldots$.

**Доказательство.** Необходимость условий уже доказана. Перейдем к доказательству достаточности. Введем оператор

$$J_n=(I-n^{-1}A)^{-1} \tag{1}$$

и покажем, что при выполнении условий теоремы

$$\lim_{n\to\infty} J_n x = x \quad \text{для любого} \quad x\in X. \tag{2}$$

Действительно, для $x\in D(A)$ имеем $AJ_nx=J_nAx=n(J_n-I)x$, и поэтому выражение $J_nx-x=n^{-1}J_n(Ax)$ стремится к нулю при $n\to\infty$, так как множество $\{J_n(Ax)\}$ равномерно ограничено относительно значений $n=1, 2, \ldots$. Поскольку область $D(A)$ плотна в $X$ и операторы семейства $\{J_n\}$ равностепенно (относительно $n$) непрерывны, $\lim\limits_{n\to\infty} J_nx=x$ для всякого $x\in X$.

Положим

$$T_t^{(n)}=\exp(tAJ_n)=\exp(tn(J_n-I))=\exp(-nt)\exp(ntJ_n),\quad t\geqslant 0. \tag{3}$$

Множество $\{J_n^k\}$ степеней операторов $J_n$ равномерно (относительно $n$ и $k$) ограничено, поэтому можно определить выражение вида $\exp(tnJ_n)$. Следовательно, согласно оценке (2) предыдущего параграфа,

$$p(\exp(ntJ_n)\,x)\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}(nt)^k(k!)^{-1}\,p\left(J_n^kx\right)\leqslant \exp(nt)\cdot q(x).$$

Это означает, что операторы семейства $\left\{T_t^{(n)}\right\}$ равностепенно непрерывны при $t\geqslant 0$ и $n=1, 2, \ldots$, т. е.

$$p\left(T_t^{(n)}x\right)\leqslant q(x). \tag{4}$$

Заметим теперь, что $J_nJ_m=J_mJ_n$ при $n, m>0$. Таким образом, оператор $J_n$ перестановочен с любым из операторов $T_t^{(m)}$. Поэтому, используя равенство $D_tT_t^{(n)}x=AJ_nT_t^{(n)}x=T_t^{(n)}AJ_nx$, вытекающее из результатов предыдущего параграфа, мы получаем

$$p\left(T_t^{(n)}x-T_t^{(m)}x\right)=p\left(\int_0^t D_s\left(T_{t-s}^{(m)}T_s^{(n)}x\right)ds\right)=$$

$$=p\left(\int_0^t T_{t-s}^{(m)}T_s^{(n)}\left(AJ_n-AJ_m\right)x\,ds\right). \tag{5}$$

Отсюда следует, что если $x \in D(A)$, то существует непрерывная на $X$ полунорма $\tilde{q}$, такая, что

$$p\left(T_t^{(n)}x - T_t^{(m)}x\right) \leqslant \int_0^t \tilde{q}\left((AJ_n - AJ_m)\,x\right) ds = t\tilde{q}\left((J_nA - J_mA)\,x\right).$$

Поэтому, учитывая доказанное выше равенство (2), мы приходим к выводу, что равномерно относительно значений $t$, изменяющихся на любом фиксированном бикомпактном множестве числовой оси,

$$\lim_{n,\, m \to \infty} p\left(T_t^{(n)}x - T_t^{(m)}x\right) = 0.$$

Так как область $D(A)$ плотна в секвенциально полном пространстве $X$, а операторы семейства $\left\{T_t^{(n)}\right\}$ равностепенно непрерывны относительно $t \geqslant 0$ и $n$, мы приходим к выводу, что при каждом $x \in X$ равномерно относительно значений $t \geqslant 0$, принадлежащих любому фиксированному бикомпактному множеству числовой оси, существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} T_t^{(n)}x = T_tx$. Поэтому семейство $\{T_t\}$ равностепенно непрерывно при $t \geqslant 0$, и в связи с установленной равномерной (относительно $t$) сходимостью выражение $T_tx$ непрерывно по $t$ при $t \geqslant 0$.

Покажем теперь, что операторы $T_t$ обладают полугрупповым свойством $T_tT_s = T_{t+s}$. Из равенства $T_{t+s}^{(n)} = T_t^{(n)}T_s^{(n)}$ мы выводим неравенство

$$\begin{aligned} p\left(T_{t+s}x - T_tT_sx\right) &\leqslant p\left(T_{t+s}x - T_{t+s}^{(n)}x\right) + p\left(T_{t+s}^{(n)}x - T_t^{(n)}T_s^{(n)}x\right) + \\ &\quad + p\left(T_t^{(n)}T_s^{(n)}x - T_t^{(n)}T_sx\right) + p\left(T_t^{(n)}T_sx - T_tT_sx\right) \leqslant \\ &\leqslant p\left(T_{t+s}x - T_{t+s}^{(n)}x\right) + q\left(T_s^{(n)}x - T_sx\right) + \\ &\quad + p\left(\left(T_t^{(n)} - T_t\right)T_sx\right) \to 0 \end{aligned}$$

при $n \to \infty$. Таким образом, $p\left(T_{t+s}x - T_tT_sx\right) = 0$ при произвольном выборе непрерывной на пространстве $X$ полунормы $p$, а это и означает, что $T_{t+s} = T_tT_s$.

Обозначим через $\hat{A}$ инфинитезимальный производящий оператор построенной равностепенно непрерывной полугруппы $\{T_t\}$ класса ($C_0$). Мы должны показать, что $\hat{A} = A$. Возьмем элемент $x \in D(A)$. Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} T_t^{(n)}AJ_nx = T_tAx$, причем здесь имеет место равномерная относительно $t$ сходимость на всяком бикомпактном множестве значений $t$. В самом деле, из неравенства (4) видно, что

$$\begin{aligned} p\left(T_tAx - T_t^{(n)}AJ_nx\right) &\leqslant p\left(T_tAx - T_t^{(n)}Ax\right) + p\left(T_t^{(n)}Ax - T_t^{(n)}AJ_nx\right) \leqslant \\ &\leqslant p\left(\left(T_t - T_t^{(n)}\right)Ax\right) + q\left(Ax - J_nAx\right). \end{aligned}$$

и выражение в правой части этого неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$, так как $\lim_{n\to\infty} J_n A x = Ax$. Из приведенных рассуждений следует, что

$$T_t x - x = \lim_{n\to\infty} \left(T_t^{(n)} x - x\right) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t T_s^{(n)} A J_n x \, ds =$$
$$= \int_0^t \left(\lim_{n\to\infty} T_s^{(n)} A J_n x\right) ds = \int_0^t T_s A x \, ds,$$

и поэтому предел $\lim_{t\downarrow 0} t^{-1}(T_t x - x) = \lim_{t\downarrow 0} t^{-1} \int_0^t T_s A x \, ds$ существует и равен $Ax$. Мы тем самым доказали, что если $x \in D(A)$, то $x \in D(\hat{A})$ и $Ax = \hat{A}x$, т. е. оператор $\hat{A}$ служит расширением $A$. Оператор $\hat{A}$ как инфинитезимальный производящий оператор полугруппы $\{T_t\}$ обладает тем свойством, что при $n > 0$ оператор $(nI - \hat{A})$ отображает область $D(\hat{A})$ на пространство $X$ взаимно однозначно. Но, согласно сделанным предположениям, оператор $(nI - A)$ отображает взаимно однозначно область $D(A)$ на $X$. Поэтому расширение $\hat{A}$ оператора $A$ должно совпадать с $A$.

Обратимся, наконец, к доказательству единственности полугруппы $\{T_t\}$. Предположим, что некоторая равностепенно непрерывная полугруппа $\{\tilde{T}_t\}$ класса $(C_0)$ имеет оператор $A$ в качестве инфинитезимального производящего оператора. Рассмотрим полугруппу $T_t^{(n)}$. Так как оператор $A$ коммутирует с $\tilde{T}_t$, мы видим, что и операторы $AJ_n$ и $T_s^{(n)}$ перестановочны с $\tilde{T}_t$. Поэтому для элементов $x \in D(A)$ мы, как и при выводе формулы (5), получаем равенство

$$p\left(T_t^{(n)} x - \tilde{T}_t x\right) = p\left(\int_0^t D_s\left(\tilde{T}_{t-s} T_s^{(n)} x\right) ds\right) =$$
$$= p\left(\int_0^t \left(-\tilde{T}_{t-s} T_s^{(n)}\right)(A - AJ_n)\, x \, ds\right). \tag{6}$$

Отсюда, учитывая, что $\lim_{n\to\infty} AJ_n x = Ax$ для всех $x \in D(A)$, мы, используя доказательство существования $\lim_{n\to\infty} T_t^{(n)} x$ $(x \in X)$, заключаем, что $\lim_{n\to\infty} T_t^{(n)} x = \tilde{T}_t x$ для всех $x \in X$. Следовательно, $T_t x = \tilde{T}_t x$ для всех $x \in X$, т. е. $T_t = \tilde{T}_t$, и полугруппа $\{T_t\}$ определяется, таким образом, однозначно.

**Замечание.** Приведенное выше доказательство показывает, что если оператор $A$ является инфинитезимальным производящим оператором равностепенно непрерывной полугруппы $\{T_t\}$ класса $(C_0)$, то

$$T_t x = \lim_{n \to \infty} \exp\left(tA(I - n^{-1}A)^{-1}\right)x, \qquad x \in X, \tag{7}$$

причем в (7) имеет место равномерная относительно $t$ сходимость на всяком бикомпактном множестве значений $t$. Это — *теорема о представлении* для полугрупп.

**Следствие 1.** Если $X$ является $B$-пространством, то условия последней теоремы можно сформулировать так: $D(A)^a = X$ и резольвента $(I - n^{-1}A)^{-1}$ существует, причем

$$\left\|(I - n^{-1}A)^{-m}\right\| \leqslant C \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ m = 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

где положительная постоянная $C$ не зависит от $n$ и $m$. В частном случае, когда полугруппа $\{T_t\}$ сжимающая, эти условия можно сформулировать так: $D(A)^a = X$ и существует резольвента $(I - n^{-1}A)^{-1}$, удовлетворяющая оценке

$$\left\|(I - n^{-1}A)^{-1}\right\| \leqslant 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

(Последнее утверждение называют *теоремой Хилле—Иосида*.)

**Замечание.** Условие (9) ввели независимо Хилле [2] и Иосида [5]. Это требование было обобщено в форме (8) Феллером [1], Филлипсом [3] и Миядера [1]. Заметим, что в (8) и (9) не обязательно рассматривать значения $n = 1, 2, \ldots$; достаточно, чтобы эти условия выполнялись для всех достаточно больших $n$. Распространение теории полугрупп на локально выпуклые линейные топологические пространства, рассмотренное в этой книге, было предложено Л. Шварцем [3].

**Следствие 2.** Пусть $X$ — некоторое $B$-пространство и семейство $\{T_t;\ t \geqslant 0\}$ ограниченных линейных операторов из $L(X, X\}$ удовлетворяет условиям

$$T_t T_s = T_{t+s} \quad (t, s \geqslant 0), \quad T_0 = I, \tag{10}$$

$$s\text{-}\lim_{t \downarrow 0} T_t x = x \quad \text{для всех} \quad x \in X, \tag{11}$$

$$\|T_t\| \leqslant Me^{\beta t} \ \text{для всех } t \geqslant 0, \text{ где постоянные } M > 0 \text{ и } \beta \geqslant 0 \text{ не зависят от } t. \tag{12}$$

Тогда оператор $(A - \beta I)$ служит, очевидно, инфинитезимальным производящим оператором равностепенно непрерывной полугруппы $\{S_t = e^{-\beta t}T_t;\ t \geqslant 0\}$, где оператор $A$ определяется соотношением $Ax = s\text{-}\lim_{t \downarrow 0} t^{-1}(T_t - I)x$. Отсюда на основании следствия 1 мы заключаем, что замкнутый линейный оператор $A$ с областью определения $D(A)^a = X$ и областью значений $R(A) \subseteq X$ является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы $\{T_t\}$, удовлетворяющей условиям (10), (11) и (12), в том и только в том случае, когда существует резольвента $(I-n^{-1}(A-\beta I))^{-1}$ и

$$\left\|(I-n^{-1}(A-\beta I))^{-m}\right\| \leqslant M \text{ для } m=1, 2, \ldots \text{ и всех достаточно больших } n. \tag{13}$$

Это условие можно переписать в виде неравенства

$$\left\|(I-n^{-1}A)^{-n}\right\| \leqslant M(1-n^{-1}\beta)^{-m} \text{ для } m=1, 2, \ldots \text{ и всех достаточно больших } n. \tag{13'}$$

В частности, если полугруппа $\{T_t\}$ удовлетворяет требованиям (10), (11) и

$$\|T_t\| \leqslant e^{\beta t} \quad \text{при всех} \quad t \geqslant 0, \tag{14}$$

то (13′) можно заменить неравенством

$$\left\|(I-n^{-1}A)^{-1}\right\| \leqslant (1-n^{-1}\beta)^{-1} \text{ для всех достаточно больших } n. \tag{13''}$$

***Приложение теоремы о представлении для полугрупп к доказательству теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций полиномами.*** Рассмотрим полугруппу операторов $(T_tx)(s)=x(t+s)$, определенную на пространстве $C[0, \infty]$. По теореме о представлении

$$(T_tx)(s)=x(t+s)=s\text{-}\lim_{n\to\infty}\exp(tAJ_nx)(s)=$$
$$=s\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}(AJ_n)^m x(s),$$

причем предельный переход $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}$ происходит равномерно относительно $t$ на всяком бикомпактном множестве значений $t$. Из этого результата легко выводится теорема Вейерштрасса о полиномиальной аппроксимации непрерывной функции. Возьмем произвольную функцию $z(t)$, непрерывную в замкнутом интервале $[0, 1]$. Предположим, что функция $x(s)\in C[0, \infty]$, и пусть $x(s)=z(s)$ при $s\in[0, 1]$. Подставим в представление полугруппы значение $s=0$; тогда получится равенство

$$(T_tx)(0)=x(t)=s\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}t^m(AJ_n)^m x(0)/m!,$$

где предельный переход равномерен относительно $t$ при $t\in[0, 1]$. Отсюда следует, что функция $z(t)$ является пределом последовательности полиномов, равномерно сходящейся на сегменте $t\in[0, 1]$.