8. Сжимающие полугруппы и диссипативные операторы

При изучении сжимающих полугрупп Люмер и Филлипс использовали некоторый аналог скалярного произведения. По терминологии этих авторов инфинитезимальные производящие операторы таких полугрупп называются *диссипативными операторами*[1]).

Предложение (Люмер). Во всяком нормированном линейном пространстве X (вещественном или комплексном) каждой паре $\{x, y\}$ элементов этого пространства можно поставить в соответствие число $[x, y]$ (вещественное или комплексное в зависимости от типа пространства) таким образом, что

$$\begin{gathered}[x+y, z]=[x, z]+[y, z], \qquad [\lambda x, y]=\lambda[x, y], \\ [x, x]=\|x\|^2, \qquad |[x, y]| \leqslant \|x\|\|y\|. \end{gathered} \tag{1}$$

Функция $[x, y]$ называется *полускалярным произведением*.

Доказательство. Согласно следствию 2 теоремы 1 гл. IV, § 6, для всякого $x_0 \in X$ существует по крайней мере один ограниченный линейный функционал $f_{x_0} \in X'$, такой, что $\|f_{x_0}\|=\|x_0\|$ и $\langle x_0, f_{x_0}\rangle = \|x_0\|^2$. Выберем для каждого $x_0 \in X$ такой функционал f_{x_0} какимнибудь однозначным способом и положим

$$[x, y]=\langle x, f_y\rangle. \tag{2}$$

Ясно, что этим определяется полускалярное произведение.

Определение. Допустим, что в комплексном (или вещественном) B-пространстве X определено полускалярное произведение $[x, y]$. Линейный оператор A с областью определения $D(A)$ и областью значений $R(A)$, лежащими в пространстве X, называется *диссипативным* (по отношению к $[x, y]$), если выполняется условие

$$\operatorname{Re}[Ax, x] \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad x \in D(A). \tag{3}$$

Пример. Возьмем в качестве X гильбертово пространство. Тогда симметрический оператор A, для которого $(Ax, x) \leqslant 0$ при всех $x \in X$, является диссипативным оператором по отношению к $[x, y]= (x, y)$, где (x, y) — это обычное скалярное произведение в гильбертовом пространстве.

Теорема (Филлипс и Люмер). Пусть область определения $D(A)$ и область значений $R(A)$ линейного оператора A принадлежат комплексному (или вещественному) B-пространству X и $D(A)^a = X$. Тогда оператор A порождает определенную на пространстве X сжимающую полугруппу класса (C_0) в том и только в том случае, если он диссипативен (по отношению ко всем полускалярным произведениям $[x, y]$) и $R(I-A)=X$.

---

[1]) Для гильбертовых пространств определение диссипативного оператора приводилось на стр. 289. — *Прим. перев.*

Доказательство. Докажем достаточность указанных условий. Допустим, что оператор A диссипативен. Выберем произвольное число $\lambda > 0$. Тогда обратный оператор $(\lambda I - A)^{-1}$ существует, и $\|(\lambda I - A)^{-1} y\| \leqslant \lambda^{-1} \|y\|$ при $y \in D((\lambda I - A)^{-1})$. В самом деле, если $y = \lambda x - Ax$, то

$$\lambda \|x\|^2 = \lambda [x, x] \leqslant \operatorname{Re}(\lambda [x, x] - [Ax, x]) = \\ = \operatorname{Re}[y, x] \leqslant \|y\| \cdot \|x\|, \tag{4}$$

так как оператор A диссипативен. По условию теоремы $R(I - A) = X$, так что значение $\lambda = 1$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A, и из (4) следует, что $\|R(1; A)\| \leqslant 1$. Если $|\lambda - 1| < 1$, то резольвента $R(\lambda; A)$ существует и представляется в виде

$$R(\lambda; A) = R(1; A)(I + (\lambda - 1) R(1; A))^{-1} = \\ = R(1; A) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} ((1 - \lambda) R(1; A))^n$$

(см. теорему 1 гл. VIII, § 2). Кроме того, из (4) следует, что $\|R(\lambda; A)\| \leqslant \lambda^{-1}$ при значениях $\lambda > 0$, для которых $|\lambda - 1| < 1$. Следовательно, применяя формулу

$$R(\mu; A) = R(\lambda; A)(I + (\mu - \lambda) R(\lambda; A))^{-1},$$

которая справедлива при значениях $\mu > 0$, удовлетворяющих неравенству $|\mu - \lambda| \cdot \|R(\lambda; A)\| < 1$, мы убеждаемся в том, что резольвента $R(\mu; A)$ существует и $\|R(\mu; A)\| \leqslant \mu^{-1}$. Повторяя этот процесс, мы устанавливаем, что резольвента $R(\lambda; A)$ существует для всех значений $\lambda > 0$ и удовлетворяет оценке $\|R(\lambda; A)\| \leqslant \lambda^{-1}$. По предположению множество $D(A)$ плотно, и поэтому, применяя следствие 1 предыдущего параграфа, мы обнаруживаем, что оператор A порождает сжимающую полугруппу класса (C_0).

Перейдем к доказательству необходимости условий теоремы. Пусть $\{T_t;\ t \geqslant 0\}$ — сжимающая полугруппа класса (C_0). В этом случае

$$\operatorname{Re}[T_t x - x, x] = \operatorname{Re}[T_t x, x] - \|x\|^2 \leqslant \|T_t x\| \cdot \|x\| - \|x\|^2 \leqslant 0.$$

Таким образом, для элементов x, принадлежащих области определения $D(A)$ инфинитезимального производящего оператора A полугруппы $\{T_t\}$,

$$\operatorname{Re}[Ax, x] = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \operatorname{Re}\{t^{-1} [T_t x - x, x]\} \leqslant 0.$$

Поэтому оператор A диссипативен. Кроме того, $\operatorname{Re}(I - A) = D(R(1; A)) = X$, так как A — это инфинитезимальный производящий оператор сжимающей полугруппы класса (C_0).

Следствие. Если область определения $D(A) \subseteq X$ замкнутого линейного оператора A плотна в B-пространстве X и $R(A) \subseteq X$, причем как оператор A, так и сопряженный ему оператор A' диссипативны, то A порождает некоторую сжимающую полугруппу класса (C_0).

Доказательство. Достаточно показать, что $R(I-A)=X$. Но оператор $(I-A)^{-1}$ замкнут, как и оператор A, и ограничен, поэтому область $R(I-A)$ образует в пространстве X замкнутое линейное подпространство. Следовательно, если предположить, что $R(I-A) \neq X$, то должен существовать нетривиальный функционал $x' \in X'$, такой, что

$$\langle (x-Ax),\ x' \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in D(A).$$

Но это означает, что $x' - A'x' = 0$, что противоречит диссипативности оператора A', поскольку $x' \neq 0$.

Замечание. Дальнейшие сведения о диссипативных операторах см. Люмер — Филлипс [1]. См. также Като [6].

9. Равностепенно непрерывные группы класса (C_0). Теорема Стоуна

Определение. Равностепенно непрерывную полугруппу $\{T_t\}$ класса (C_0) мы назовем *равностепенно непрерывной группой класса* (C_0), если существует равностепенно непрерывная полугруппа $\{\hat{T}_t\}$ класса (C_0), удовлетворяющая следующему условию. Если определить операторы S_t формулой

$$S_t = \begin{cases} T_t & \text{при} \quad t \geqslant 0, \\ \hat{T}_{(-t)} & \text{при} \quad t \leqslant 0, \end{cases}$$

то семейство $\{S_t,\ -\infty < t < \infty\}$ операторов S_t обладает групповым свойством

$$S_t S_s = S_{t+s} \qquad (-\infty < t,\ s < \infty), \quad S_0 = I. \tag{1}$$

Теорема. Рассмотрим локально выпуклое секвенциально полное линейное топологическое пространство X. Пусть область определения $D(A) \subseteq X$ некоторого линейного оператора A плотна в X и $R(A) \subseteq X$. Тогда A служит инфинитезимальным производящим оператором некоторой равностепенно непрерывной группы класса (C_0) операторов $S_t \in L(X, X)$ [1]), удовлетворяющих условию (1),

[1]) Оператор A считается по определению инфинитезимальным производящим оператором группы $\{S_t\}$, если A порождает полугруппу $\{S_t;\ t \geqslant 0\}$, а оператор $(-A)$ порождает полугруппу $\{S_{(-t)};\ t \geqslant 0\}$. — *Прим. перев.*